V. Békés Megyei Középiskolai Matematikaverseny

2012/2013

Megoldások

<u>10. évfolyam</u>

1. Egy csokoládégyárban két gépsoron kezdték el gyártani a 85 gramm tömegű csoki Mikulásokat. A gyártás utolsó fázisában megmérik minden csoki Mikulás tömegét, ha annak tömege kevesebb, mint 83 gramm, akkor csomagolás nélkül visszakerül az olvasztóba. Az első nap a két gépsoron összesen 26400 csoki mikulást gyártottak, amiből 636-ot találtak az előírtnál kisebb tömegűnek. Az egyik gépsoron gyártott Mikulások 2%-a, míg a másikon gyártott Mikulások 3%-a volt selejtes. Hány selejtes Mikulást gyártottak az egyik illetve a másik gépsoron?

<u>Megoldás:</u>

Jelölje az első gépsoron gyártott Mikulások számát x, a másikon gyártottat $26400-x$.
(1 pont)

A selejtek száma: $0{,}02\cdot x$, illetve $0{,}03\cdot(26400-x)$ (2 pont)

A feltételekből: $0{,}02\cdot x + 0{,}03\cdot(26400-x) = 636$ (1 pont)

Összevonás és rendezés után: $-0{,}01x = - 156$ (2 pont)

Az első gépsoron gyártott Mikulások száma 15600, a másodikon gyártottaké 10800
(2 pont)

Az első gépsoron gyártott selejtek száma $0{,}02\cdot 15600 = 312$ (1 pont)

A második gépsoron gyártott selejtek száma $0{,}03\cdot 10800 = 324$ (1 pont)

<u>Összesen: 10 pont</u>

V. Békés Megyei Középiskolai Matematikaverseny

2012/2013

Megoldások

<u>10. évfolyam</u>

2. Határozd meg p és q prímszámokat, ha $p+p^2+p^3+q+q^2+q^3=413$

<u>Megoldás:</u>

Ha p és q is páratlan lenne, akkor az összeg nem lehetne páratlan: (1 pont)

Így az egyiknek párosnak kell lenni. Ez csak a 2 lehet. Legyen pl.: p=2 (1 pont)

Így az egyenlet a következőképpen alakul:

$$2+2^2+2^3+q+q^2+q^3=413$$

$$q+q^2+q^3=399$$ (1 pont)

q-t kiemelve és a 399-et prímtényezőkre bontva:

$$q(1+q\ \ +q^2)=3\cdot 7\cdot 19$$ (2 pont)

Mivel q prím, így csak q=3 vagy q=7 vagy q=19 lehetséges. (1 pont)

Ellenőrizve csak a q=7 a megoldás.

Tehát a megoldás: p=2 és q=7(1 pont) (3 pont)

Az egyenlet p-re és q-ra szimmetrikus, ezért q=2 és p=7 is megoldás (1 pont)

<u>Összesen: 10 pont</u>

3. Négyjegyű számokat készítünk a páros számjegyek felhasználásával úgy, hogy a számjegyek nem ismétlődhetnek.

   a) Hány négyjegyű számot tudunk így készíteni?

   b) Mennyivel egyenlő a fenti négyjegyű számok összege?

Megoldás:

a)
A százas helyi értékre négy, a tízes helyi értékre három és az egyes helyi értékre két számjegyből választhatunk. (2 pont)

A keresett négyjegyű számok száma: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ (2 pont)

b)

Az ezres helyi értéken a négy számjegy (2,4,6,8) mindegyike 24-szer szerepel, további helyi értékeken 18-szor (mert a 0 számjegy 24-szer) (3 pont)

Így a megfelelő négyjegyű számok összege:

$(24 \cdot 10^3 + 18 \cdot 10^2 + 18 \cdot 10 + 18) \cdot (8+6+4+2) = 519960$ (3 pont)

Összesen: 10 pont

4. Oldd meg az egész számpárok halmazán a következő egyenletet!

$$xy + x + 3y = 0$$

Megoldás:

Adjunk mindkét oldalhoz 3-at!

$xy + x + 3y + 3 = 3$ (1 pont)

Alakítsuk a baloldalt szorzattá!

$x(y + 1) + 3(y + 1) = 3$

$(y + 1)(x + 3) = 3$ (3 pont)

Mivel 3 prím, így a feltételek miatt a következő lehetőségek adódhatnak (esetvizsgálat):

1. eset:

$y+1=1$ és $x+3=3$

ebből $y=0$ és $x=0$ adódik megoldásnak

2. eset:

$y+1=3$ és $x+3=1$

ebből $y=2$ és $x=-2$ adódik megoldásnak

3. eset:

$y+1=-1$ és $x+3=-3$

ebből $y=-2$ és $x= -6$ adódik megoldásnak

4. eset:

$y+1=-3$ és $x+3=-1$

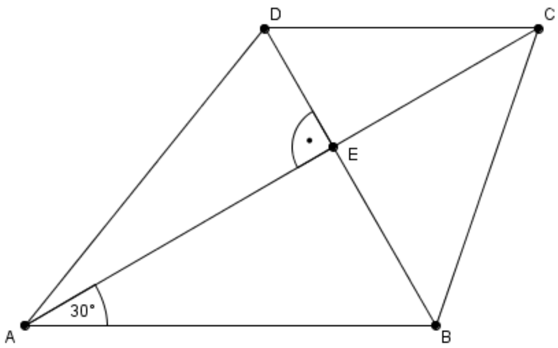
ebből $y=-4$ és $x=-4$ adódik megoldásnak (4 pont)

A megoldások megfelelnek a feltételnek (ellenőrzés) (2 pont)

Összesen: 10 pont

5. Egy trapéz alapjai 12 cm és 8 cm hosszúak. Az egyik átló 30º-os szöget zár be az alappal, és merőleges a másik átlóra.
   a) Hány cm hosszú a trapéz két átlója?
   b) Mekkora a trapéz területe?

Megoldás: a) Készítsünk ábrát, és használjuk annak jelöléseit! (2 pont)



Az ABE háromszög A-nál lévő szöge 30º-os, ezért EB = 6 cm. (1 pont)
Az $AE = \sqrt{3} \cdot 6$ cm. (félszabályos háromszög vagy Pitagorasz tétel) (1 pont)
A DCE háromszögben C-nál lévő szöge 30º-os, ezért ED = 4 cm.
(félszabályos háromszög) (1 pont)
A $CE = \sqrt{3} \cdot 4$ cm. (Pitagorasz tétel) (1 pont)
Így BD = 10 cm, $AC = \sqrt{3} \cdot 10$ cm. (2 pont)

b) Mivel a trapéz átlói merőlegesek egymásra ezért a területe:

$$\frac{AC \cdot BD}{2} = 50 \cdot \sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$ (2 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: kerekített értékkel is elfogadhatók az eredmények