

V. Békés Megyei Középiskolai Matematikaverseny

2012/2013

Megoldások

11. évfolyam

1. Ha egy kétjegyű szám számjegyeit felcseréljük, akkor a kapott kétjegyű szám értéke az eredeti szám értékénél 108 %-kal nagyobb. Melyik ez a kétjegyű szám?

Megoldás:

Jelölje a kétjegyű számot \overline{xy} .

A feltételnek megfelelő egyenlet: $\overline{yx} = \frac{208}{100} \overline{xy}$ (2 pont)

Helyi értékes felírás alapján $250y + 25x = 520x + 52y$ egyenletet kapjuk. (2 pont)

Az egyenletet rendezve és egyszerűsítve: $2y = 5x$ (2 pont)

Mivel $(2;5) = 1$, és figyelembe véve, hogy x, y számjegyek: $x = 2, y = 5$ az egyetlen megoldás. (2 pont)

A keresett kétjegyű szám a 25 (1 pont)

Ellenőrzés: $\frac{52}{25} = 2,08$, ami 108%-os növekedést jelent. (1 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Ha csak megtalálja a megoldást, és ellenőrzi, akkor 4 pontot kapjon!

V. Békés Megyei Középiskolai Matematikaverseny

2012/2013

Megoldások

11. évfolyam

2. Egy szabályos dobókockával ötször dobunk egymás után és sorba leírjuk a dobott pöttyök számát, így ötjegyű számsorozatot kapunk.
- a) Hányféle számsorozatot kaphatunk?
 - b) Hányféle sorozatot kaphatunk, melyekben pontosan egy kettes szerepel?
 - c) Hányféle olyan számsorozatot kaphatunk, ahol az első helyen álló számjegy különbözik az összes többitől?

Megoldás:

- a) Minden dobás hatféle lehet, így összesen $6^5 = 7776$ számsorozatot kaphatunk. (2 pont)
- b) Az egy kettes helyére öt lehetőség van (1 pont)
a többi helyre öt számjegy kerülhet (1 pont)
így a feltételnek megfelelő számsorozatok száma: $5 \cdot 5^4 = 3125$ (2 pont)
- c) Az első helyen hatféle számjegy állhat, míg a többi helyen ötféle szám. (2 pont)
Ezért a megfelelő sorozatok száma $6 \cdot 5^4 = 3750$. (2 pont)

Összesen: 10 pont

V. Békés Megyei Középiskolai Matematikaverseny

2012/2013

Megoldások

11. évfolyam

3. Határozd meg a következő kifejezés értelmezési tartományát!

$$\log_{x-3}(-x^2 + 5x + 14)$$

Írd fel a számhalmazt relációjelekkel, és ábrázold számegyenesen!

Megoldás:

A logaritmus definíciója szerint $x-3 > 0$ és $x-3 \neq 1$ (2 pont)

A megoldások: $x > 3$ és $x \neq 4$ (1 pont)

Az argumentumra: $-x^2 + 5x + 14 > 0$ (1 pont)

Zérushelyek: $x = -2$ és $x = 7$ (2 pont)

Egyenlőtlenség megoldása: $-2 < x < 7$ (1 pont)

Értelmezési tartomány: $3 < x < 4 \cup 4 < x < 7$ (2 pont)

Ábrázolás számegyenesen: (1 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

Az értelmezési tartomány elfogadható $3 < x < 7$ és $x \neq 4$ alakban is.

V. Békés Megyei Középiskolai Matematikaverseny

2012/2013

Megoldások

11. évfolyam

4. Tekintsük az $x^2 + 2(m - 2)x + m^2 - 4m - 21 = 0$ másodfokú egyenletet, ahol m valós paraméter!

- Milyen m értékek esetén van az egyenletnek valós megoldása?
- Bizonyítsuk be, hogy az egyenlet valós gyökeinek különbsége nem függ m -től!

Megoldás:

a) A másodfokú egyenlet diszkriminánsa:

$$D = [2(m - 2)]^2 - 4(m^2 - 4m - 21) = 4m^2 - 16m + 16 - 4m^2 + 16m + 84 = 100$$

(3 pont)

Tehát $D > 0$ minden m esetén.

(1 pont)

Így az egyenletnek minden m esetén van megoldása.

(1 pont)

b) A megoldó képlet és az a) alapján:

$$x_{1,2} = \frac{-2m + 4 \pm \sqrt{100}}{2} = -m + 2 \pm 5$$

(3 pont)

A két gyök különbsége ± 10 ,

(1 pont)

ami független m -től.

(1 pont)

Összesen: 10 pont

V. Békés Megyei Középiskolai Matematikaverseny

2012/2013

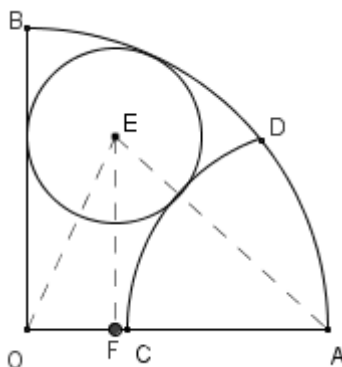
Megoldások

11. évfolyam

5. Az O középpontú, R sugarú negyed kör körívének végpontjait jelöljük A -val és B -vel! Rajzoljunk a negyed körbe egy A középpontú $\frac{2}{3}R$ sugarú körívet! Határozd meg annak a körnek a sugarát, amely érinti a negyed kör AB körívét, az OB sugarát és az A középpontú $\frac{2}{3}R$ sugarú körívet!

Megoldás:

Készítsünk ábrát, és használjuk annak jelöléseit!



Jó ábra: (1 pont)

A keresett kör sugarát jelölje r ! Felhasználva, hogy érintkező körök középpontjait összekötő egyenesre illeszkedik az érintési pont, kapjuk, hogy (1 pont)

$OE = R-r$, $AE = \frac{2}{3}R + r$, $OF = r$ és $FA = R-r$. (2 pont)

Az OFE és a FEA derékszögű háromszögek közös EF befogójára felírva Pitagorasz tételét, a következő egyenletet kapjuk:

$$\left(\frac{2}{3}R + r\right)^2 - (R-r)^2 = (R-r)^2 - r^2 \quad (2 \text{ pont})$$

$$\frac{4}{9}R^2 + \frac{4}{3}Rr + r^2 - R^2 + 2Rr - r^2 = R^2 - 2Rr + r^2 - r^2 \quad (2 \text{ pont})$$

Rendezés után kapjuk, hogy a kör sugara: $r = \frac{7}{24}R$. (2 pont)

Összesen: 10 pont