V. Békés Megyei Középiskolai Matematikaverseny

2012/2013

Megoldások

<u>12. évfolyam</u>

1. Egy röplabda bajnokságban minden csapat pontosan egyszer játszik a többi csapat mindegyikével. A bajnokságból még két forduló van hátra és eddig 104 mérkőzést játszottak le. Hány csapat szerepel a bajnokságban? Hány mérkőzés van még hátra a bajnokságból?

<u>Megoldás:</u>

Jelöljük a csapatok számát n-nel!

Az összes mérkőzések száma (n-1 forduló): $\frac{n(n-1)}{2}$ (2 pont)

Eddig lejátszott mérkőzések száma (n-3 forduló): $\frac{n(n-3)}{2}$ (1 pont)

A feltétel szerint:

$\frac{n(n-3)}{2} = 104$ (1 pont)

A másodfokú egyenletet rendezve, megoldva $n_1=16$ és $n_2= -13$ (tartalmi ellentmondás) (4 pont)

Tehát n=16 csapat szerepel a bajnokságban. (1 pont)

Hátralévő meccsek száma:

$\frac{16 \cdot 15}{2} - 104 = 16$ (1 pont)

<u>Összesen: 10 pont</u>

2. A $\overline{8731x45y}$ tízes számrendszerbeli nyolcjegyű számban az *x* és *y* számjegyek véletlenszerű megválasztásánál mennyi a valószínűsége, hogy 12-vel osztható nyolcjegyű számot kapunk?

Megoldás:

Az *x* és az *y* egymástól függetlenül 10-10 féleképpen választható meg,
így összesen 100 adott alakú szám van. (1 pont)
12-vel pontosan azok a számok oszthatók, melyek oszthatók 3-mal és 4-gyel. (1 pont)
4-gyel pontosan akkor osztható, ha utolsó két számjegyéből alkotott
kétjegyű szám osztható 4-gyel. (1 pont)
Így *y* értéke 2 vagy 6. (2 pont)
3-mal akkor osztható, ha a számjegyek összege osztható 3-mal. (1 pont)

Ha $y = 2$, akkor *x* lehetséges értékei 0, 3, 6 és 9, ami négy számot jelent. (1 pont)

Ha $y = 6$, akkor *x* lehetséges értékei 2, 5 és 8, ami három számot jelent. (1 pont)

A 100 szám közül 7 lesz 12-vel osztható. (1 pont)

A kérdéses valószínűség 7:100=0,07 (1 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

A valószínűség minden megszokott formátumban elfogadható.

Ha nem írja le az oszthatósági szabályokat, de a megoldásában látható, hogy azokra épít, kapja meg a maximális pontot!

V. Békés Megyei Középiskolai Matematikaverseny

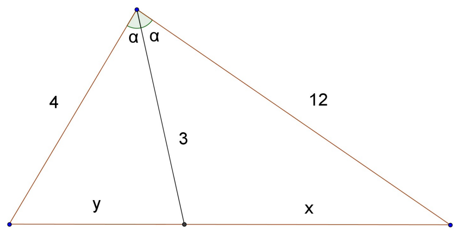
2012/2013

Megoldások

12. évfolyam

3. Egy háromszög két oldala 4 és 12 egység, az általuk közbezárt szög szögfelezője 3 egység hosszú. Mekkora a háromszög harmadik oldala?

Megoldás:



Használjuk az ábra jelöléseit: (1 pont)

A koszinusz tétel alapján (kétszer felírva):

$x^2 = 12^2 + 3^2 - 2 \cdot 12 \cdot 3 \cos\alpha = 153 - 72\cos\alpha$ (1 pont)

$y^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos\alpha = 25 - 24\cos\alpha$ (1 pont)

A második egyenlet háromszorosából az első egyenletet kivonva kapjuk:

$x^2 - 3y^2 = 78$ (*) (2 pont)

A szögfelező tétel szerint:

$\frac{x}{y} = \frac{12}{4} = 3$ (1 pont)

Ebből:

x=3y

$x^2=9y^2$ (1 pont)

Ezt beírva (*)-ba, kapjuk:

$6y^2=78$ (1 pont)

y= $\sqrt{13} \Rightarrow x = 3\sqrt{13}$ (a negatív megoldások nem jönnek számításba) (1 pont)

$c = x + y = 4\sqrt{13}$ (1 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Az eredmények elfogadhatók kerekített értékekkel.

4. Határozd meg a $P(x;y)=x^2+5y^2+2xy+4y+12$ polinom legkisebb helyettesítési értékét! Mennyivel egyenlő ekkor $x+y$?

Megoldás:

Alakítsuk a polinomot teljes négyzetek összegévé! (1 pont)

$$P(x;y)=x^2+5y^2+2xy+4y+12=x^2+y^2+2xy+4y^2+4y+1+11=$$
$$=(x+y)^2+(2y+1)^2+11$$
(5 pont)

A teljes négyzetek nem negatívak, így a kifejezés legkisebb értéke 11 (1 pont)

Ez akkor teljesül, ha mindkét négyzetes tag 0-val egyenlő: (1 pont)

Ekkor: y = -0,5 és x = 0,5 (1 pont)

Így $x + y = 0$ (1 pont)

Összesen: 10 pont

V. Békés Megyei Középiskolai Matematikaverseny

2012/2013

Megoldások

12. évfolyam

5. Oldd meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletet!

$$\left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y^2 + \cos x\right)^2 = 0$$

Megoldás:

Két nem negatív szám összege csak úgy lehet 0, ha mindkettő 0. (1 pont)

A $\left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right)^2 = 0$, ha $|\sin x| = 0,5$ (1 pont)

ekkor $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ vagy $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. (2 pont)

Az $\left(y^2 + \cos x\right) = 0$ miatt csak a $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ lehetséges, (2 pont)

amihez tartozó x értékek:

$x_1 = \frac{5\pi}{6} + k2\pi,\quad x_2 = \frac{7\pi}{6} + l2\pi$, ahol k, l egész számok. (2 pont)

Minden x értékhez két y érték tartozik, amik $y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$. (2 pont)

Összesen: 10 pont