V. Békés Megyei Középiskolai Matematikaverseny

2012/2013

Megoldások

<u>9. évfolyam</u>

1. Az elmúlt évek egyikében négyszer emelték a benzin árát. Az első három alkalommal rendre 5%-kal, 6%-kal, 10%-kal. Hány százalékos volt a negyedik áremelés egész %-ra kerekítve, ha ebben az évben a benzin ára az év elei ár egyharmadával növekedett?

<u>Megoldás:</u>

Legyen a benzin ára az év elején: b (1 pont)

1. emelés után: $1{,}05b$

2. emelés után: $1{,}05 \cdot 1{,}06b$

3. emelés után: $1{,}05 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}1b$

4. emelés után: $1{,}05 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}1b \cdot x$ (4 pont)

Teljes emelés: $\frac{1}{3}b$ (1 pont)

$1{,}05 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}1b \cdot x = \frac{4}{3}b$ (1 pont)

$x \approx 1{,}089$ (2 pont)

Így a negyedik áremelés: $\approx 9\%$ (1 pont)

<u>Összesen: 10 pont</u>

2. Melyik szám a nagyobb, a $\dfrac{10^{2011}+1}{10^{2012}+1}$ vagy a $\dfrac{10^{2012}+1}{10^{2013}+1}$?

<u>Megoldás:</u>

Legyen: $a=10^{2011}$ (1 pont)

Így a két tört a következő lesz:

$\dfrac{a+1}{10a+1}$ illetve $\dfrac{10a+1}{100a+1}$ (2 pont)

Osszuk el a két (pozitív) törtet egymással, és alakítsuk a kifejezést!

$$\frac{a+1}{10a+1}:\frac{10a+1}{100a+1}=\frac{a+1}{10a+1}\cdot\frac{100a+1}{10a+1}=\frac{100a^2+101a+1}{100a^2+20a+1}=\frac{100a^2+20a+1}{100a^2+20a+1}+\frac{81a}{100a^2+20a+1}=$$
$$=1+\frac{81a}{100a^2+20a+1}$$

(5 pont)

Ez az összeg pedig biztosan nagyobb, mint 1, hiszen a pozitív, így a második tag is pozitív.

Így a hányados 1-nél nagyobb.

Mivel pozitív számokat osztottunk egymással, így az első tört a nagyobb. (2 pont)

<u>Összesen: 10 pont</u>

V. Békés Megyei Középiskolai Matematikaverseny

2012/2013

Megoldások

<u>9. évfolyam</u>

3. Bizonyítsd be, hogy a $7 + 7^2 + 7^3 +\ldots +7^{2010} + 7^{2011} + 7^{2012}$ összegben az egyesek és a tízesek helyén is 0 számjegy áll!

<u>Megoldás:</u>

Csoportosítsuk az összeget négyesével! (1 pont)

Egyes csoportokban a 7 hatványainak végződései rendre: 7; 9; 3; 1 (1 pont)

Periodikusán ismétlődnek. (1 pont)

A négyes csoportok végződése így: 0 (1 pont)

Tehát az összeg utolsó számjegye is 0 lesz. (1 pont)

A második négyes csoporttól kezdve minden csoportból emeljük ki a legkisebb kitevőjű tagot! A zárójelben mindenütt pontosan az első négyes csoport marad: $7+7^2+7^3+7^4$

(2 pont)

Ez az összeg pontosan: 2800 (1 pont)

Összesen 503 ilyen négyes csoport van, amelyekben a tízesek és az egyesek helyén is 0 áll. Így az összegükben, amely = az eredeti összeggel, szintén 0 áll a tízesek és az egyesek helyén.

(2 pont)

<u>Összesen: 10 pont</u>

<u>Megjegyzés:</u> ha a diák a megoldást a csoportosítás után azonnal a kiemeléssel folytatja, kapja meg a teljes pontszámot!

4. Az $\overline{xabc}$ alakú négyjegyű szám kilencszerese az $\overline{abc}$ alakú háromjegyű számnak. Bizonyítsd be, hogy az $\overline{abc}$ osztható 125-tel!

<u>Megoldás:</u>

Legyen $\overline{abc} = y$ (1 pont)

ekkor $\overline{xabc} = 1000x + y$ (2 pont)

A feladat feltétele szerint:

$1000x + y = 9y$ (2 pont)

$1000x = 8y$ (1 pont)

$125x = y$ (1 pont)

$125x = \overline{abc}$ (1 pont)

Ez azt jelenti, hogy $y = \overline{abc}$ a 125 többszöröse, azaz 125 osztja az eredeti számot.

(2 pont)

<u>Összesen: 10 pont</u>

V. Békés Megyei Középiskolai Matematikaverseny

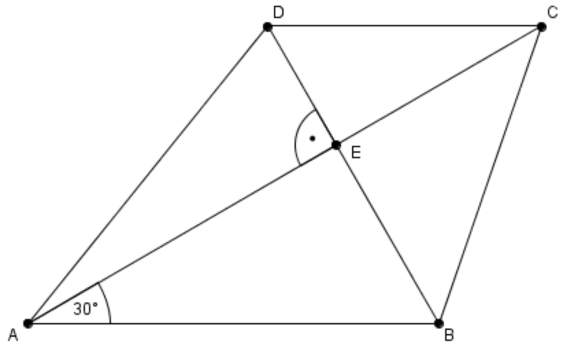
2012/2013

Megoldások

<u>9. évfolyam</u>

5. Egy trapéz alapjai 12 cm és 8 cm hosszúak. Az egyik átló 30º-os szöget zár be az alappal, és merőleges a másik átlóra.
   a) Hány cm hosszú a trapéz két átlója?
   b) Mekkora a trapéz területe?

<u>Megoldás:</u> a) Készítsünk ábrát, és használjuk annak jelöléseit! (2 pont)



Az *ABE* háromszög *A*-nál lévő szöge 30º-os, ezért *EB* = 6 cm. (1 pont)

Az $AE = \sqrt{3} \cdot 6$ cm. (félszabályos háromszög vagy Pitagorasz tétel) (1 pont)

A *DCE* háromszögben *C*-nál lévő szöge 30º-os, ezért *ED* = 4 cm.
(félszabályos háromszög) (1 pont)

A $CE = \sqrt{3} \cdot 4$ cm. (Pitagorasz tétel) (1 pont)

Így *BD* = 10 cm, $AC = \sqrt{3} \cdot 10$ cm. (2 pont)

b) Mivel a trapéz átlói merőlegesek egymásra ezért a területe:

$$\frac{AC \cdot BD}{2} = 50 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2.$$ (2 pont)

<u>Összesen: 10 pont</u>

<u>Megjegyzés:</u> kerekített értékkel is elfogadhatók az eredmények