

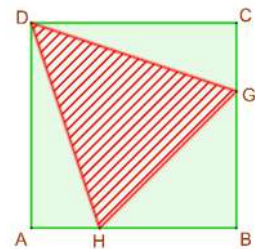
XV. Békés Vármegyei Középiskolai Matematikaverseny

2023/2024

I. kategória

Megoldások

1. Egy $ABCD$ négyzet alakú, 9 m oldalhosszúságú, füves telken egy DHG háromszög alakú virágágyást alakítunk ki a rajzon látható módon, ahol H pont az AB oldal A ponthoz közelebbi, a G pont pedig a BC oldalnak a C ponthoz közelebbi harmadoló pontja. Mekkora a telken a virágágyás területének és a teleknek a virágágyáson kívüli, füves területének az aránya?



Megoldás:

A telken belül a virágágyáson kívüli füves területnek a nagyságát számoljuk ki először.

A négyzet derékszögei és a konstrukció miatt a füves terület 2 egybevágó derékszögű háromszögből és egy egyenlő szárú derékszögű háromszögből tevődik össze.

Ezek területösszege négyzetméterben:

$$2 \cdot 9 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 45$$

A virágágyás területét / négyzetméterben/ megkapjuk, ha az egész telek területéből kivonjuk a füves rész területét:

$$9 \cdot 9 - 45 = 36$$

A virágágyás és a füves rész területének aránya:

$$\frac{36}{45} = \frac{4}{5} \text{ vagy } 4:5$$

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésedre.

Válaszaidat számolással, szövegesen kellően indokold, a gondolatod menete jól látható legyen!

Használható eszközök: számológép, függvénytáblázat, író- és rajzeszközök

Minden feladat helyes megoldásáért 10 pont jár.

Bolyai János Matematikai Társulat Békés Megyei Tagozata
Oktatási Hivatal Békéscsabai Pedagógiai Oktatási Központ
2024. január 22.

2. Mutasd meg, hogy a $2023^{2024} + 2024^{2023}$ összeg osztható 5-tel!

Megoldás:

Az 5-tel való oszthatósághoz megmutatjuk, hogy az összeg első tagja 1-re, a második tagja 4-re végződik, tehát az összeg 5-re végződik, vagyis 5-tel osztható lesz.

Az összeg végződéséhez megnézzük először az egyes tagok végződéseit.

A 3-ra végződő számok hatványai ismétlődve, ilyen sorrendben, 3-ra, 9-re, 7-re és 1-re végződnek négyes ciklusban.

A 4-gyel osztható hatványkitevő esetén a 3-ra végződő alap esetén a hatvány végződése 1 lesz, így a 2023^{2024} is 1-re fog végződni.

A 4-re végződő számok hatványai mindig 4-re vagy 6-ra végződnek, kettes ciklusban, ilyen sorrendben,

így páratlan kitevő esetén a 2024^{2023} hatvány 4-re végződik.

Az összeg végződése a két tag (hatvány) végződésének az összege lesz:

$$\underline{\quad}1 + \underline{\quad}4 = \underline{\quad}5$$

Az összeg 5-re végződik, tehát osztható 5-tel.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésedre.
Válaszaidat számolással, szövegesen kellően indokold, a gondolatod menete jól látható legyen!
Használható eszközök: számológép, függvénytáblázat, író- és rajzeszközök
Minden feladat helyes megoldásáért 10 pont jár.

Bolyai János Matematikai Társulat Békés Megyei Tagozata
Oktatási Hivatal Békéscsabai Pedagógiai Oktatási Központ
2024. január 22.

3. Egy mobiltelefon ára 180000 Ft, egy kerékpár ára ennél 36000 Ft-tal több.
- a) Hány százaléka a mobiltelefon ára a kerékpár árának? Egész értékre kerekíts!
 - b) Hány százalékkal kerül többre a kerékpár a mobiltelefon árához viszonyítva?

Megoldás:

- a) Hány százaléka a mobiltelefon ára a kerékpár árának?

A kerékpár ára $180000 + 36000 = 216000$ Ft

A mobiltelefon árát (érték) viszonyítjuk a kerékpár árához (alap) százalékban:

$$\frac{180000}{216000} \cdot 100 = 0,8333 \dots = 83\%$$

Tehát a mobil ára a kerékpár árának 83 %-a

- b) Hány százalékkal kerül többre a kerékpár a mobiltelefon árához viszonyítva?

A kerékpár többlet árát (érték) viszonyítjuk a mobil árához (alap) százalékban:

$$\frac{36000}{180000} \cdot 100 = 20 \%$$

Tehát a kerékpár 20 %-kal kerül többre a mobil árához viszonyítva.

Másik lehetőség:

A kerékpár árát (érték) viszonyítjuk a mobil árához (alap) százalékban:

$$\frac{216000}{180000} \cdot 100 = 120 \%$$

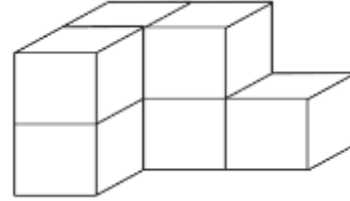
Tehát a kerékpár a mobil árához viszonyítva $120 - 100 = 20\%$ -kal kerül többre.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésedre.
Válaszaidat számolással, szövegesen kellően indokold, a gondolatod menete jól látható legyen!
Használható eszközök: számológép, függvénytáblázat, író- és rajzeszközök
Minden feladat helyes megoldásáért 10 pont jár.

Bolyai János Matematikai Társulat Békés Megyei Tagozata
Oktatási Hivatal Békéscsabai Pedagógiai Oktatási Központ
2024. január 22.

4. Hét darab egybevágó kockából ragasztottuk össze az ábrán látható (nem pontos méretű) testet. Két szomszédos kocka egy-egy teljes lapjával van összeragasztva. Egy kocka térfogata 8 cm^3 .

- a) Hány cm hosszú egy kocka éle?
- b) Hány cm az ábrán látható test leghosszabb éle?
- c) Hány cm^2 az ábrán látható test felszíne?



Megoldás:

- a) Hány cm hosszú egy kocka éle?

Egy kocka térfogata az élével felírva $V = a^3$, azaz $8 = a^3$

Ebből **$a = 2 \text{ cm}$ egy kocka éle.**

- b) Hány cm az ábrán látható test leghosszabb éle?

A test leghosszabb éle az alul lévő 3 kocka egymás melletti (hátsó) élének összege, azaz

a leghosszabb él hossza $2 + 2 + 2 = 6 \text{ cm}$.

- c) Hány cm^2 az ábrán látható test felszíne?

Felül- és alulnézetből 4 – 4 négyzet látható a felszínből.

Balról és jobbról oldalnézetben szintén 4 – 4 négyzetet láthatunk.

Elölről és hátulról 5 – 5 négyzetet láthatunk a test felszínéből.

Így összesen $2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \cdot 4 = 104 \text{ cm}^2$ a test felszíne.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésedre.
Válaszaidat számolással, szövegesen kellően indokold, a gondolatod menete jól látható legyen!
Használható eszközök: számológép, függvénytáblázat, író- és rajzeszközök
Minden feladat helyes megoldásáért 10 pont jár.

Bolyai János Matematikai Társulat Békés Megyei Tagozata
Oktatási Hivatal Békéscsabai Pedagógiai Oktatási Központ
2024. január 22.

5. Tekintsük a kétjegyű természetes számokat!

- a) Hány olyan van közöttük, amelyek oszthatók 3-mal is és 4-gyel is?
- b) Hány kétjegyű természetes szám van, amelyik nem osztható sem 2-vel, sem 7-tel?

Megoldás:

- a) Hány olyan van közöttük, amelyek oszthatók 3-mal is és 4-gyel is?

Ha egy szám osztható 3-mal és 4-gyel is, akkor osztható 12-vel is, hiszen a 3 és a 4 relatív prímekek, legnagyobb közös osztójuk 1.

Keresnünk kell a 12-vel osztható kétjegyű természetes számokat.

Ezek: 12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96

Összesen: 8 db

- b) Hány kétjegyű természetes szám van, amelyik nem osztható sem 2-vel, sem 7-tel?

90 db kétjegyű természetes szám van.

A 90 db kétjegyű természetes számból 45 db osztható 2-vel.

A 90 db kétjegyű természetes számból 13 db osztható 7-tel.

A 90 db kétjegyű természetes számból 2-vel is és 7-tel is, vagyis a 14-gyel (relatív prímekek) osztható számok száma 7 db.

Logikai szitával számolva a 2-vel vagy 7-tel osztható kétjegyű természetes számok száma

$$45 + 13 - 7 = 51$$

Sem 2-vel, sem 7-tel nem osztható kétjegyű természetes számok száma:

$$90 - 51 = 39 \text{ db.}$$

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésedre.
Válaszaidat számolással, szövegesen kellően indokold, a gondolatod menete jól látható legyen!
Használható eszközök: számológép, függvénytáblázat, író- és rajzeszközök
Minden feladat helyes megoldásáért 10 pont jár.

