Bolyai János Matematikai Társulat Békés Megyei Tagozata
Oktatási Hivatal Békéscsabai Pedagógiai Oktatási Központ
2025. január 20.

XVI. Békés Vármegyei Középiskolai Matematikaverseny

2024/2025

III. kategória

Megoldások

1. A 2025 egy olyan évszám, amely egy természetes szám négyzete.
   a) Hány év múlva lesz legközelebb egy olyan évszám, ami szintén egy természetes szám négyzete?
   b) Írd fel a 2025 szám azon pozitív osztóit, amelyek oszthatók 45-tel!

Megoldás:

1./a

A 2025 prímtényezős felbontását elvégezve kapjuk, hogy

$$2025=5^2\cdot 3^4=(5\cdot 3^2)^2=45^2$$

A 2025-nél nagyobb szomszédos négyzetszám 46^2 lesz, vagyis 2116.

2116-2025=91, azaz 91 év múlva lesz legközelebb az évszám újra négyzetszám.

3 pont

1./b

Vegyük elő ismét a 2025 prímtényezős felbontását és alakítsuk át a következőképpen: $2025=3^4\cdot 5^2=3^2\cdot 5\cdot 3^2\cdot 5=45\cdot 3^2\cdot 5$. A legutolsó szorzatból felírhatjuk a 45-ös számot tartalmazó osztókat:

45, $45\cdot 3$, $45\cdot 3^2$, $45\cdot 5$, $45\cdot 3\cdot 5$, $45\cdot 3^2\cdot 5$. Ezek a számok 2025 osztói és egyben 45-tel oszthatók.

3 pont

Összesen: 6 pont

2. Számláld össze!

   a) Egy végzős osztályban mindegyik tanuló pontosan egy fényképet ad önmagáról minden osztálytársának. Összesen hány db fényképet osztanak ki egymásnak a 29 fős osztályban?

   b) Egy nagycsaládban a négy gyermek közös ajándékként két teljesen egyforma plüss macit és két teljesen egyforma plüss cicát kapott. Mindegyik gyermek választott magának egyet az ajándékok közül. Hányféleképpen oszthatták el egymás között a négy plüssfigurát, ha a két macit, illetve a két cicát sem tudjuk megkülönböztetni egymástól?

Megoldás:

2./a

Egy tanuló 28 másik tanulónak ad önmagáról fényképet, ezt mind a 29 tanuló megteszi, így 29·28=812 db fényképet osztanak ki egymásnak.

2 pont

2./b

Ha a négy kistestvér közül 2 testvér kiválasztja a két macit, akkor a másik 2 testvérnek már csak a cicák jutnak. Így ahányszor a négy kistestvérből 2 testvér kiválasztható sorrendre való tekintet nélkül, annyiféleképpen oszthatták el a 4 plüssállatkát, azaz $\binom{4}{2}$-féleképpen. $\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 6.$

Tehát 6-féleképpen oszthatják el egymás között a 2-2 állatkát.

6 pont

Összesen: 8 pont

3. Legyen a valós számokon értelmezett $g\ (x) = x^2 - 4x$ függvény!
   a) Oldd meg a valós számok halmazán a $g(x) \geq 0$ egyenlőtlenséget!
   b) A valós számokon értelmezett $h\ (x) = \ |g(x)|$ függvény grafikonjának vázlatos elkészítése alapján határozd meg azokat az intervallumokat, amelyekbe tartozó x-ek esetén a h függvény monoton növekvő!

Megoldás:

3/a.

Alakítsuk szorzattá az x^2-4x ≥ 0 egyenlőtlenség baloldalát!

x·(x-4) ≥ 0 egyenlőtlenség baloldala akkor és csak akkor nemnegatív, ha x és x-4 azonos előjelűek, azaz:

x ≥ 0 és x-4 ≥ 0 vagy x ≤ 0 és x-4 ≤ 0.

Az egyenlőtlenségpárok közös megoldásai adják az eredeti egyenlőtlenség megoldásait:

x ≥ 4 vagy x ≤ 0.

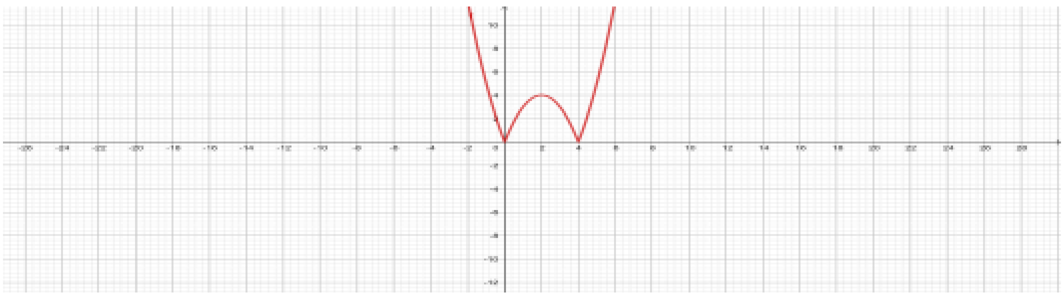
5 pont

3./b

A h(x) = $|x^2 - 4x|$ függvény másodfokú függvény abszolútértékét jelenti, ezért g(x) grafikonját olyan parabolából kaphatjuk meg, mely parabola felfelé nyitott (x^2 együtthatójának előjele miatt), a parabola x = 0-nál és x = 4-nél metszi az x tengelyt és ezt a parabolát 0≤ $x \leq 4$ intervallumon tükrözni kell az x tengelyre.

A h(x) függvény növekvő, a grafikonról leolvasva, a 0 ≤ x ≤ 2 és 4 ≤ x intervallumokon.

5 pont



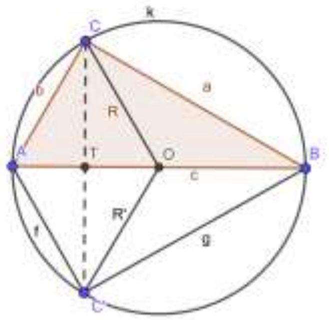
Összesen: 10 pont

4. Az ABC derékszögű háromszög C csúcsánál van a derékszög, az A csúcsánál lévő belső szöge 60°-os, míg a háromszög nagyobbik befogója 50 cm hosszú. A háromszög C csúcsát tükrözzük az átfogóra, a C csúcs képe legyen C'! Az $AC'BC$ négyszögből papírsárkányt szeretnénk készíteni egy kör alakú keményebb papírból úgy, hogy az AB, illetve a CC' merevítő pálcákra fogjuk ráragasztani a papírlemezt.
   a) Számítsd ki, mekkora az $AC'BC$ papírsárkány köré írható kör sugara!
   b) Számítsd ki az $AC'BC$ négyszög területét, valamint az AB és a $C'C$ merevítő pálcák hosszát!

Megoldás:

4./a

Vegyük az ABC derékszögű háromszög C csúcsának tükörképét AB oldalra és rajzoljuk meg az adódó AC'BC négyszög/ rombusz/ köré a kört!



Az AC'BC négyszög köré írt kör egyben az ABC derékszögű háromszög köré írható kör, így a Thalész-tétel miatt a keresett körsugár az ABC háromszög átfogójának fele. ABC háromszögnek van egy 90^{0}-os és egy 60^{0}-os szöge, így a B csúcsánál a háromszögnek 30^{0}-os szöge lesz. Az ABC háromszög egy szabályos háromszög felének is felfogható, ahol a BC= 50 cm-es oldal a szabályos háromszög magasságának felel meg, az AB=c oldal pedig a szabályos háromszög oldalának felel meg, az AC oldal pedig a szabályos háromszögoldal fele, vagyis b=$\frac{c}{2}$.

Pitagorasz - tétellel megkaphatjuk az ABC háromszögre alkalmazva a $c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50$ összefüggést, melyből $c = \frac{100}{\sqrt{3}}$, tehát AB=$\frac{100}{\sqrt{3}}$.

Az AB átfogó fele a keresett sugár: $R = \frac{50}{\sqrt{3}}\, cm \approx 28{,}9$ cm.

5 pont

4./b

Az AC'BC négyszög egy derékszögű deltoid, mely két egybevágó derékszögű háromszögből áll, vagyis a deltoid területe egy AB=c oldalú szabályos háromszög területével egyenlő.

$$T = \frac{c^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{100^2}{3}\sqrt{3}}{4} = \frac{10^4\sqrt{3}}{12} \approx 1443{,}4\ cm^2\ .$$

A 'sárkány' merevítőpálcái AB és C'C hosszúságú szakaszok, a deltoid átlói, vagy ABC háromszög tekintetében az $AB = \frac{100}{\sqrt{3}} \approx 57{,}7\ cm$ átfogó és az ABC háromszög átfogóhoz tartozó magasságának kétszerese, vagyis

C'C= 2·CT=$2 \cdot R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{50}{\sqrt{3}\cdot} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\ cm.$

/ Ez a C'C szakasz a C'BC szabályos háromszög oldala is./

7 pont

Összesen: 12 pont

5. Egy iskola 11. évfolyamának

a) egyik osztályában minden tanuló magyar- vagy matematika-szakkörbe jár, de mindenki csak az egyikbe. A magyar-, illetve a matematika-szakkörbe járó tanulók számának aránya a tanév elején $8:5$ volt. A második félév elején viszont annyi változás történt, hogy a magyarszakkörből átment 4 diák a matematika-szakkörbe, így a magyar-, illetve a matematika-szakkörbe járó tanulók számának aránya $6:7$-re változott. Mekkora az osztály létszáma?

b) három osztálya van: A, B és C osztály. Az első félévi matematika osztályzatok átlaga az A osztályban 3,5, a B osztályban 3,7, míg a C osztályban 3,2 volt. Az A osztály létszáma 26 fő, a B osztályé 30 fő. Tudjuk azt is, hogy a 11. évfolyam összes tanulójának első félévi matematika osztályzataiból számolt évfolyamátlag 3,5 volt. Hány tanuló jár a C osztályba?

Megoldás:

5./a

Állítsunk fel egyenleteket az osztály tanulóira: x fő járjon eredetileg az osztályból magyarszakkörbe, y fő járjon eredetileg matematika-szakkörbe.

$$\frac{x}{y} = \frac{8}{5}$$

Félév után a két szakkörbe x-4, illetve y+4 fő járt, így kapjuk:

$$\frac{x-4}{y+4} = \frac{6}{7}$$

A két egyenletből álló egyenletrendszert törtmentesítéssel, majd egy ismeretlenre való visszavezetéssel oldhatjuk meg, s így a

x = 16 fő és y = 10 fő megoldások állnak elő, amelyeket ellenőrizve, összeadva kapjuk a 26 fős osztálylétszámot.

6 pont

5./b

Jelöljük az A osztályban a félévi matematika osztályzatok összegét

$$a_1+a_2+\ldots+a_{26}=\sum_{i=1}^{26} a_i \text{ formulával!}$$

Hasonlóan a B osztályban az osztályzatok összege

$$b_1+b_2+\ldots+b_{28}=\sum_{j=1}^{28} b_j,$$

a C osztályban, a tanulók számát n-nek véve, az osztályzatok összege

$$c_1+c_2+\ldots+c_n=\sum_{k=1}^{n} c_k.$$

Felírjuk az osztályok átlagát és az évfolyam átlagát:

$$\frac{\sum_{i=1}^{26} a_i}{26} = 3{,}5\ ,\ \frac{\sum_{j=1}^{28} b_j}{30} = 3{,}7\ ,\ \frac{\sum_{k=1}^{n} c_k}{n} = 3{,}2\ ,$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{26} a_i + \sum_{j=1}^{28} b_j + \sum_{k=1}^{n} c_k}{26+30+n} = 3{,}5\ .$$

Az évfolyam átlagában helyettesítsük be a számlálónál a megfelelő értékeket:

$$\frac{26 \cdot 3{,}5 + 30 \cdot 3{,}7 + n \cdot 3{,}2}{26+30+n} = 3{,}5\ .$$

A fenti egyenletet n-re megoldva, kapjuk az n = 20 megoldást, tehát a C osztályban 20 tanuló van.

8 pont

Összesen: 14 pont