XVI. Békés Vármegyei Középiskolai Matematikaverseny

2024/2025

II. kategória

Megoldások

1. Mikihez 5 vendég (Ádi, Beni, Cili, Dani, Emma) érkezett a szilveszteri vacsorára. Ebben a társaságban többen nem voltak ismerősök, ők kézfogással mutatkoztak be egymásnak. Ádi 5-tel, Beni 4-gyel, Cili 3-mal, Dani 2-vel, Miki pedig 1 személlyel fogott kezet. Emma hány személynek mutatkozott be kézfogással? A megoldásodat indokold, szemléltesd rajzzal (gráffal) is!

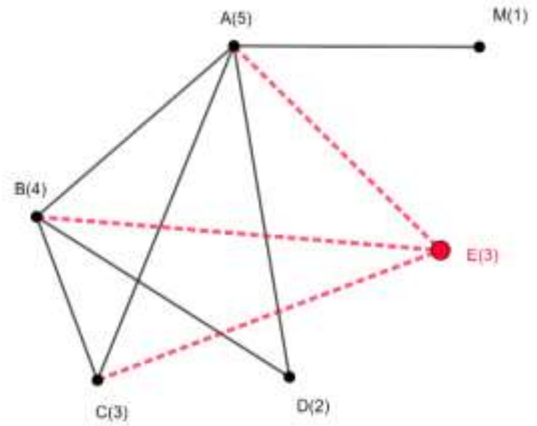
Megoldás:

Áditól induljunk ki! Neki mindenkivel (5 kézfogás) kezet kellett fogni. Így meglett Miki egyetlen kézfogása is.

Beninek a továbbiakkal kellett kezet fogni (1+3=4 kézfogás).

Cili már csak Emmával (2+1=3) foghatott kezet, mert Daninak megvolt a 2 kézfogása.

Válasz: Emma **3 embernek** mutatkozott be (az ábráról leolvashatóan).



Összesen: **6 pont**

2. Áron elhatározta, hogy a következő fél évben havonta megnöveli az eddig félretett pénzét (vagyonkáját) úgy, hogy minden hónapban az előző havi vagyonkáját 10 %-kal fogja megnövelni. Sajnos az első négy hónapban elmaradt a tervétől, mivel havonta csak 6 %-kal tudta növelni megtakarítását. Ezért az ötödik hónapban 15 %-kal, míg az utolsó alkalommal pedig 21 %-kal növelte meg azt. Elérte-e így a tervezett növekedést Áron?

Megoldás:

Az eredeti terv szerint 6 hónap alatt (az eddigi vagyonkát x-szel jelölve):

$$x \cdot 1{,}1^6 = 1{,}7716 \cdot x \text{ Ft-ja lenne}$$

Az első 4 hónapban összegyűlt:

$$x \cdot 1{,}06^4 = 1{,}2625 \cdot x \text{ Ft gyűlt össze}$$

Az ötödik hónapban: $1{,}2625 \cdot x \cdot 1{,}15 = 1{,}451875 \cdot x$ Ft-ja van

Végül: $1{,}451875 \cdot x \cdot 1{,}21 = 1{,}7568 \cdot x$ Ft-ja lett

Pozitív x esetén $1{,}7568 \cdot x < 1{,}7716 \cdot x$

Válasz: Áron így **nem érte el** a tervezett növekedést.

Összesen: **8 pont**

3. Egy iskola 10. évfolyamán felmérőt írtak matematikából: húszan írtak 4-est, huszonketten 3-ast, hatan 2-est, és sajnos négy tanuló 1-est. Hányan írtak 5-ös felmérőt, ha tudjuk, hogy az évfolyam átlaga nagyobb volt 3,415-nél, de kisebb volt, mint 3,42?

Megoldás:

x (> 0, egész) tanuló írt 5-öst,

az átlag így:

$$\frac{20 \cdot 4 + 22 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + x \cdot 5 \cdot}{20 + 22 + 4 + 6 + x}$$

tehát

$$3{,}415 < \frac{162 + 5 \cdot x}{52 + x} < 3{,}42$$

Mivel a $52 + x$ pozitív (egész) szám, ezért megszorozva az egyenlőtlenség mindhárom tagját vele, nem változik a relációjel iránya.

$$177{,}58 + 3{,}415 \cdot x < 162 + 5 \cdot x < 177{,}84 + 3{,}42 \cdot x \ / -162$$

$$15{,}58 + 3{,}415 \cdot x < 5 \cdot x < 15{,}84 + 3{,}42 \cdot x$$

$$\begin{cases} 15{,}58 + 3{,}415 \cdot x < 5 \cdot x \\ 5 \cdot x < 15{,}84 + 3{,}42 \cdot x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15{,}58 < 1{,}585x \\ 1{,}58 \cdot x < 15{,}84 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9{,}83 < x \\ x < 10{,}02 \end{cases}$$

Az egyenlőtlenségrendszerből $x = 10$, mivel x-nek egész számnak kell lenni.

Ezzel ellenőrzés:

$$\frac{20 \cdot 4 + 22 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 10 \cdot 5}{20 + 22 + 4 + 6 + 10} = \frac{212}{62} = 3{,}419$$

Ez az átlag a megadott intervallumba esik.

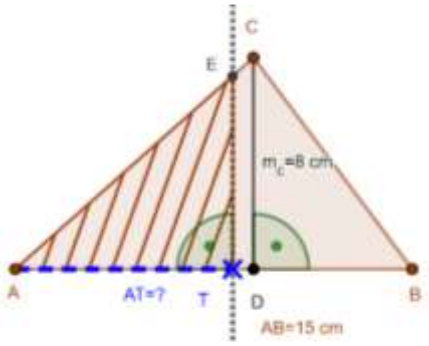
Válasz: **10 tanuló írt jeles** felmérő dolgozatot.

Összesen: **10 pont**

4. Az ABC háromszög AB oldala 15 cm hosszú. Az AB oldalhoz tartozó, a C csúcsból induló CD magasság 8 cm-es, és a D pont az AB oldalt $3:2$ arányban osztja ketté.
    a) Készíts a lényeges adatokat tartalmazó vázlatot!
    b) Mekkora az ABC háromszög területe?
    c) Mekkora nagyságú szakaszokra bontja az AB oldalt az az egyenes, ami a CD magassággal párhuzamos, és felezi az ABC háromszög területét? Eredményedet cm-ben, egy tizedes pontossággal add meg!

Megoldás:

a)



2 pont

b) A háromszög területe: $t = \frac{15 \cdot 8}{2} = \boldsymbol{60\ cm^2}$ **2 pont**

c) Az AB oldal szakaszai, AD és DB, arányos osztással számíthatók ki:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2} \Longrightarrow \frac{AD}{15-AD} = \frac{3}{2} \Longrightarrow AD = \frac{15}{5} \cdot 3 = 9\ cm \Longrightarrow DB\ =\ 15 - 9\ =\ 6 \text{ cm}$$

Az ATE háromszög és az ADC háromszög hasonló, mert megfelelő szögeik egyenlő nagyságúak, hiszen e egyenes párhuzamos CD magassággal, így megfelelő oldalaik aránya megegyezik:

$$\frac{ET}{8} = \frac{AT}{AD} = \frac{AT}{9} \Longrightarrow \boldsymbol{ET} = \boldsymbol{\frac{8 \cdot AT}{9}}$$

Az ATE háromszög területe fele az ABC háromszög területének, így:

$$\frac{AT \cdot ET}{2} = 30 \Longrightarrow \boldsymbol{ET} = \boldsymbol{\frac{60}{AT}},$$

$$\frac{8 \cdot AT}{9} = \frac{60}{AT}$$

$$8 \cdot AT^2 = 540$$

$$AT^2 = 67{,}5 \Longrightarrow AT = \sqrt{67{,}5} \approx 8{,}2\ \ (AT > 0)$$

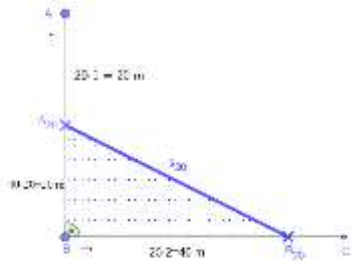
Válasz: A háromszög területét felező megfelelő egyenes az A csúcstól kb. 8,2 cm távolságra metszi az AB oldalegyenest, így $AT = \sqrt{67{,}5} \approx 8{,}2$ cm, a $TB = 15 - \sqrt{67{,}5} \approx 6{,}8$ cm. **8 pont**

Összesen: **12 pont**

5. Anikó és Boróka a kedvenc parkjukban töltik szabadidejüket. A parkban van három gyönyörű fa, amelyeket a térképen A-val, B-vel és C-vel jelöltek. Ezeket a fákat egyenes gyalogösvény köti össze. Tudjuk, hogy az AB gyalogösvény a valóságban 40 m hosszú és merőleges a BC gyalogösvényre. Az A fánál Anikó, a B fánál Boróka áll. Egyszerre indulnak el, Anikó a B felé 1 m/s állandó sebességgel, Boróka pedig a C felé 2 m/s szintén állandó sebességgel.
   a) Számítsd ki egy tizedes jegy pontossággal, hogy 20 s múlva hány m-re lesznek egymástól!
   b) Az indulástól számítva hány másodperc telik el, hogy a legközelebb legyenek egymáshoz?
   c) Számítsd ki egy tizedes jegy pontossággal, hány méter ez a legrövidebb távolság!

<u>Megoldás:</u>

a)



$AA_{20} = 20 \cdot 1 = 20\ m$ (A sebesség miatt)

$A_{20}B = 40 - 20 = 20\ m$

$BB_{20} = 20 \cdot 2 = 40\ m$ (A sebesség miatt)

Az $A_{20}BB_{20}$ derékszögű háromszögben:

$$20^2 + 40^2 = {s_{20}}^2$$

$$s_{20} = \sqrt{2000}$$

$$s_{20} \approx 44{,}7$$

<u>Válasz:</u> 20 s múlva kb. 44,7 m távolságra lesznek egymástól.

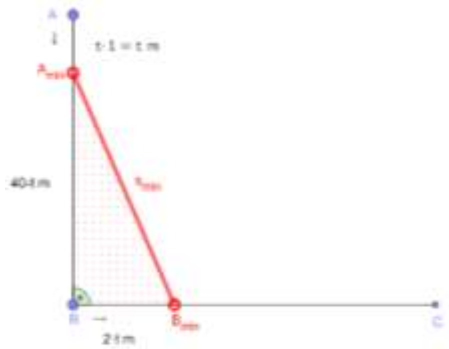
4 pont

b) Jelöljük a minimális távolság idejét t-vel:

$$AA_{min} = 1 \cdot t = t\ m$$

$$A_{min}B = 40 - 1 \cdot t = 40 - t\ m$$

$$BB_{min} = 2 \cdot t$$



A távolságuk négyzetét leíró $\{s_{min}(t)\}^2 = f(t)$ függvény:

$$f(t) \; = \; (40-t)^2 + (2t)^2$$

$$f(t) = (40-t)^2 + (2t)^2 = 1600 - 80t + t^2 + 4t^2 = 5t^2 - 80t + 1600$$

másodfokú függvény minimum helyét keressük, ami megegyezik az $s(t)$ minimum helyével.

Teljes négyzetté alakítás:

$$f(t) = 5(t^2 - 16t + 320)$$

$$f(t) = 5[(t-8)^2 - 64 + 320]$$

$$f(t) = 5[(t-8)^2 + 256]$$

$$f(t) = 5(t-8)^2 + 1280$$

$$f(t) = 5(t-8)^2 + 1280$$

Innen leolvasható a minimum helye.

Válasz: $\boldsymbol{t = 8s}$ múlva lesznek a legközelebb egymáshoz.

8 pont

c) A b) pont alapján **a legrövidebb távolság közöttük:**

$$f(8) = \{s_{min}(8)\}^2 = 5(8-8)^2 + 1280 = 0 + 1280 = 1280$$

$$\boldsymbol{s_{min}(8) = \sqrt{1280}\,m \;\approx\; 35{,}8\,m}$$

Tehát Anikó és Boróka között a **legrövidebb távolság** ≈ $\boldsymbol{35{,}8\ m}$**.**

2 pont

Összesen: **14 pont**