XVI. Békés Vármegyei Középiskolai Matematikaverseny

_2024/2025_

IV. kategória

Megoldások

1. Hetedhétországban a telefonszámok hét számjegyből állnak, és minden számjegy 7-nél kisebb. Az ország lakosai között kiosztották az összes lehetséges ilyen tulajdonságú telefonszámot. Kiderült, hogy minden lakosnak pontosan egy telefonszám jutott. VII. Hetetlennek (ő az ország királya) a telefonszáma: $000-0000$.

   a) Hány lakosa van Hetedhétországnak? (2 pont)

   VII. Hetetlen véletlenszerűen kiválasztott egy telefonszámot.

   b) Mennyi annak a valószínűsége (esélye), hogy egy olyan számot választott, amelynek az első három számjegye azonos, míg az utolsó négy számjegye az első háromtól és egymástól is páronként különböző számjegy? (4 pont)

Megoldás:

A „felhasználható” számjegyek: 0, 1, 2, 3, 4, 5 és 6 (a telefonszámok kezdődhetnek 0-val is).

a) A lehetséges telefonszámok (az ország lakosainak) száma:

$\underline{7}\ \underline{7}\ \underline{7}\ \underline{7}\ \underline{7}\ \underline{7}\ \underline{7} \Rightarrow 7^7 = 823\,543$ vagy $V_7^{7;i} = 7^7 = 823\,543$

b) Összes (lehetséges) esetek száma: $823\,543$

Kedvező esetek száma: $\underbrace{\underline{a}\ \underline{a}\ \underline{a}}_{7}\ \underline{6}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3} \Rightarrow 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 2\,520$ vagy $V_7^5 = \dfrac{7!}{(7-5)!} = 2\,520$

A keresett valószínűség: $p = \dfrac{2\,520}{823\,543} = \dfrac{360}{117\,649} \approx 0{,}00306$

2. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

   a) $\sqrt{4x^2+729}=45$ (4 pont)

   b) $\dfrac{3^{4x+1}\cdot 9^{3x-2}}{27^{2x+3}}=81^{15}$ (4 pont)

Megoldás:

a) $\sqrt{4x^2+729}=45$

Felhasználva, hogy tetszőleges x valós szám esetén $x^2\geq 0$, így $4x^2+729>0$, ezért az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

Négyzetre emelés után a $4x^2+729=2025$ egyenlethez jutunk, ahonnan $x^2=\dfrac{1296}{4}=324$. A másodfokú egyenlet megoldásai $x=18$ és $x=-18$. A kapott értékek kielégítik az eredeti egyenletet, melyről behelyettesítés útján meggyőződhetünk.

b) $\dfrac{3^{4x+1}\cdot 9^{3x-2}}{27^{2x+3}}=81^{15}$

A hatványazonosságok figyelembevételével

$9^{3x-2}=\left(3^2\right)^{3x-2}=3^{6x-4}$ $\quad 27^{2x+3}=\left(3^3\right)^{2x+3}=3^{6x+9}$ $\quad 81^{15}=\left(3^4\right)^{15}=3^{60}$, így

$\dfrac{3^{4x+1}\cdot 3^{6x-4}}{3^{6x+9}}=3^{60} \quad\Rightarrow\quad 3^{4x+1+6x-4-6x-9}=3^{60} \quad\Rightarrow\quad 3^{4x-12}=3^{60}$

Az $x\to 3^x$ függvény szigorúan monoton (növekvő), így a $4x-12=60$ egyenlethez jutunk, melynek megoldása $x=18$. A kapott érték kielégíti az eredeti egyenletet, melyről behelyettesítés útján meggyőződhetünk.

3. Egy számtani sorozat első három tagjának összege -27, a következő három tag összege -18.

   a) Határozd meg az első 75 tag összegét! (5 pont)

   Adott az $S = 2025 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2024)$ összeg. Mely állítások igazak az S-re?

   b1) S prímszám b2) S négyzetszám b3) S-nek 45 pozitív osztója van (5 pont)

Megoldás:

a) Legyen $(a_n)_{n \in Z^+}$ az adott számtani sorozat. A feladat feltételei alapján:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = -27 \\ a_4 + a_5 + a_6 = -18 \end{cases}$$

Figyelembe véve, hogy $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, $(n \geq 2)$, ahol d a számtani sorozat differenciája, az alábbi (kétismeretlenes) egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = -27 \\ (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a_1 + 3d = -27 \\ 3a_1 + 12d = -18 \end{cases}$$

A két egyenlőség különbségéből $9d = 9$, ahonnan $d = 1$, majd a kapott eredmény alapján $a_1 = -10$.

Felhasználva, hogy a számtani sorozat első n tagjának összege $S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$, kapjuk, hogy $S_{75} = \frac{2 \cdot (-10) + 74 \cdot 1}{2} \cdot 75 = 27 \cdot 75 = 2025$.

b) Felhasználva, hogy $1 + 2 + 3 + \ldots + 2024 = \frac{2024 \cdot 2025}{2} (= 2049300)$, így

$$S = 2025 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 2024) = 2025 + 2 \cdot \frac{2024 \cdot 2025}{2} = 2025 \cdot 2025 = 2025^2 (= 4100625).$$

Mindezeket figyelembe véve

b1) Az állítás **hamis**, hiszen az S osztható például 3-mal és 5-tel is;
b2) Az állítás **igaz**, mert az S a 2025-nek a négyzete;
b3) A $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, így az S prímtényezős felbontásában $S = 2025^2 = (3^4 \cdot 5^2)^2 = 3^8 \cdot 5^4$, ahonnan az S (pozitív) osztóinak száma $(8+1) \cdot (4+1) = 45$, tehát az állítás **igaz**.

4. A Különös szülők Szilveszter nevű gyermekük születésekor, és azután a gyermek minden születésapján befizettek egy bankszámlára 500 ezer petákot, egészen addig, amíg a gyermek el nem érte a 14 éves kort. Ezután hat éven keresztül nem történt befizetés a számlára.

   a) Mekkora összeghez juthatott ily módon 20 éves korában Szilveszter? (8 pont)

   Szilveszter úgy döntött, hogy a megtakarítást 5 év alatt fogja teljesen felhasználni úgy, hogy minden évben a születésnapján (először a huszonegyediken) azonos összeget fog kivenni a bankból.

   b) Mennyi az évente felvehető összeg? (4 pont)

   A bank végig 4,5 %-os éves kamatlábbal számol, és a kamatjóváírás mindig Szilveszter születésnapja előtt egy nappal történik meg. Válaszodat mindkét esetben ezer petákra kerekítve add meg!

Megoldás:

a) Jelölje S a húsz év alatt „megtakarított” összeget.
Az „első” 14 évben gyűjtőjáradék alapján történik a megtakarítás, ahol az éves (állandó) kamatláb $p = 0{,}045$, a kamattényező $q = 1 + 0{,}045 = 1{,}045$ és az éves állandó befizetés mértéke $a = 500\,000$. Így, ha S_1 jelöli a „megtakarított összeget”, akkor

$$S_1 = a \cdot q \cdot \frac{q^{14} - 1}{q - 1} = 500\,000 \cdot 1{,}045 \cdot \frac{1{,}045^{14} - 1}{1{,}045 - 1} \approx 9\,892\,027 \text{ (peták)}$$

A rákövetkező hat évben nem történt befizetés, ezért az addig megtakarított összeg „csak” kamatozik. Így a hat év alatt „megnövekedett összeg”:

$$S = S_1 \cdot q^6 = 9\,892\,027 \cdot 1{,}045^6 \approx 12\,881\,992{,}5 \text{ (peták)}$$

Tehát Szilveszter 20 éves korára $12\,882$ ezer peták „megtakarítással rendelkezik”.

b) A soron következő években Szilveszter a megtakarított összeget „törlesztőjáradék, hiteltörlesztés” alapján fogja felvenni, ahol a az éves (állandó) összeg, az évek száma $n = 5$, míg a kamattényező továbbra is $q = 1{,}045$. Ekkor

$$a = S \cdot \frac{q^5 \cdot p}{q^5 - 1} = 12\,881\,992{,}5 \cdot \frac{1{,}045^5 \cdot 0{,}045}{1{,}045^5 - 1} \approx 2\,934\,410{,}2 \text{ (peták)}$$

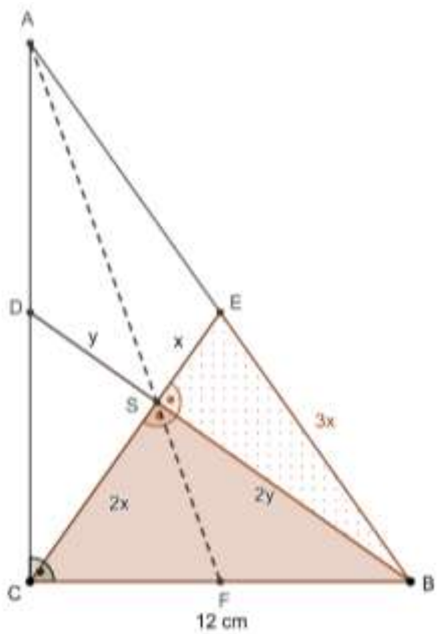
Tehát Szilveszter $2\,934$ ezer petákot vehet fel évente.

5. Az ABC derékszögű háromszögben $BC = 12$ cm, míg az AC befogóhoz tartozó súlyvonal merőleges az AB átfogóhoz tartozó súlyvonalra.
   a) Mennyi a BC oldalhoz tartozó súlyvonal hosszának pontos értéke? (10 pont)
   b) Számold ki a $\frac{r}{R}$ arányt két tizedesnyi pontossággal, ahol r és R az ABC háromszögbe, illetve a háromszög köré írható kör sugara! (4 pont)

Megoldás:

a)

Legyen D az AC, E az AB és F az BC oldal felezőpontja.



BD és CE súlyvonalak merőlegesek egymásra, S metszéspontjuk (az ABC háromszög súlypontja) 2:1 arányban osztja a súlyvonalakat.

Legyen $SE = x$, $SD = y$, így $CS = 2x$ és $BS = 2y$, ahol $x, y \in R^+$.

A Thalész-tétel alapján E pont az ABC háromszög köré írható kör középpontja, így $AE = BE = CE = \dfrac{AB}{2} = 3x$.

A Pitagorasz-tételt alkalmazva rendre az SCB és SEB háromszögekben az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 = 12^2 \\ x^2 + 4y^2 = 9x^2 \end{cases}$$

A két egyenlőség különbségéből $3x^2 = 144 - 9x^2$, majd átrendezés után $12x^2 = 144$, ahonnan $x^2 = 12$. A másodfokú egyenlet gyökei $x = \sqrt{12}\left(= 2\sqrt{3}\right)$ és $x = -\sqrt{12}$, ez utóbbi nem megoldás, mert az x pozitív valós szám.

Ha $x^2 = 12$, akkor $y^2 = 24$, ahonnan (figyelembe véve, hogy az y pozitív valós szám) következik, hogy $y = \sqrt{24}\left(= 2\sqrt{6}\right)$. A kapott eredmények alapján $CE = 3x = 3\sqrt{12}\left(= 6\sqrt{3}\right)$, $AB = 6x = 6\sqrt{12}\left(= 12\sqrt{3}\right)$ és $BD = 3y = 3\sqrt{24}\left(= 6\sqrt{6}\right)$.

A Pitagorasz-tételt alkalmazva, előbb az ABC háromszögben

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \quad \Rightarrow \quad AC^2 + 12^2 = 36 \cdot 12 \quad \Rightarrow \quad AC^2 = 288 \quad \Rightarrow \quad AC = \sqrt{288}\left(= 12\sqrt{2}\right),$$

majd az ACF háromszögben

$$AC^2 + CF^2 = AF^2 \quad \Rightarrow \quad 288 + 6^2 = AF^2 \quad \Rightarrow \quad AF^2 = 324 \quad \Rightarrow \quad AF = 18$$

Tehát a BC oldalhoz tartozó súlyvonal hossza 18 cm.

b) Az a) pontbeli számítások alapján $R = CE = 3\sqrt{12}\left(= 6\sqrt{3}\right)$.

Derékszögű háromszögben a beírható kör átmérője egyenlő a befogók összegéből kivonva az átfogót, azaz $2r = BC + AC - AB = 12 + 12\sqrt{2} - 12\sqrt{3}$, ahonnan $r = 6 + 6\sqrt{2} - 6\sqrt{3}$.

Mindezek alapján

$$\frac{r}{R}=\frac{6+6\sqrt{2}-6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}=\frac{6\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{6\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\left(=\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{2}{3}}-1\right)\approx 0{,}39\,.$$

Tehát a $\frac{r}{R}$ arány (két tizedesnyi pontossággal) $0{,}39$.