XVI. Békés Vármegyei Középiskolai Matematikaverseny
2024/2025
I. kategória
Megoldások

1. Egy 15000 Ft-ba kerülő cipő árát fölemelték 15%-kal. Mivel így a cipő nem volt kelendő, a felemelt árból elengedték annak 10 %-át.

   a) Mennyi lett a cipő ára az áremelés után?
   b) Mennyi lett a cipő ára az árcsökkentés után?
   c) Az eredeti ár hány százalékával változott a cipő ára a kétszeri árváltozás után?

Megoldás:

a) A cipő új ára az eredeti (100%) ár 115%-a, mivel megemelték 15%-kal.

Így a cipő áremelés utáni ára $15000 \cdot 1{,}15 = 17250$ forint lesz.

2 pont

b) Most a megemelt ár lesz 100%, és mivel ezt 10%-kal csökkentették, így az árcsökkentés utáni ár a 17250 forint 90%-ával egyenlő.

Tehát az árcsökkentés utáni ár $17250 \cdot 0{,}90 = 15525$ forint lesz

2 pont

c) A kétszeri árváltozás utáni ár és az eredeti ár aránya $\frac{15525}{15000} = 1{,}035$

Mivel $1{,}035 \cdot 100 = 103{,}5 = 100 + 3{,}5$, így az eredeti ár 3,5%-ával növekedett.

2 pont
Összesen: 6 pont

2. Egy apuka jelenleg hétszer olyan idős, mint a lánya. Mikor a lány majd annyi idős lesz, mint most az apukája, az akkori életkoruk összege éppen 80 év lesz. Hány éves most az apuka, és hány éves most a lánya?

Megoldás:

Jelölje a lány jelenlegi életkorát: x
Ekkor az apa jelenlegi életkora: $7x$

Ahhoz, hogy a lány életkora annyi legyen, mint most az apa életkora, el kell telni $6x$ évnek.

Ha eltelik $6x$ év, akkor: a lány $x + 6x = 7x$ éves lesz,
az apa $7x + 6x = 13x$ éves lesz.

Mivel $6x$ év eltelte után az életkorük összege 80, ezért a: $7x + 13x = 80$ egyenletet kapjuk.

A $7x + 13x = 80$ egyenlet megoldásából kapjuk, hogy $x = 4$

Válasz: Most az apuka: $7x = 7 \cdot 4 = 28$ éves
A lánya: 4 éves

Összesen: 8 pont

3. Egy 750 fős iskola diákjai a foci- és a kézilabda sportkörök közül választhattak maguknak sporttevékenységet. A diákok egyötöde egyik sportkört sem választotta, míg mindkét sportkörbe a diákok egyhatod része jár. Tudjuk azt is, hogy csak kézilabdára kétszer annyian járnak, mint focira összesen.

a) Hányan nem választották egyik sportkört sem?
b) Hányan választották mindkét sportkört?
c) Hányan választották a kézilabda sportkört?
d) Hányan választották a foci sportkört?

Megoldás:

a)

Nem jár semmilyen sportkörre a diákok egyötöd része. A 750 diáknak az egyötöd része $750:5 = 150$ diák, tehát 150 diák nem jár semmilyen sportkörre.

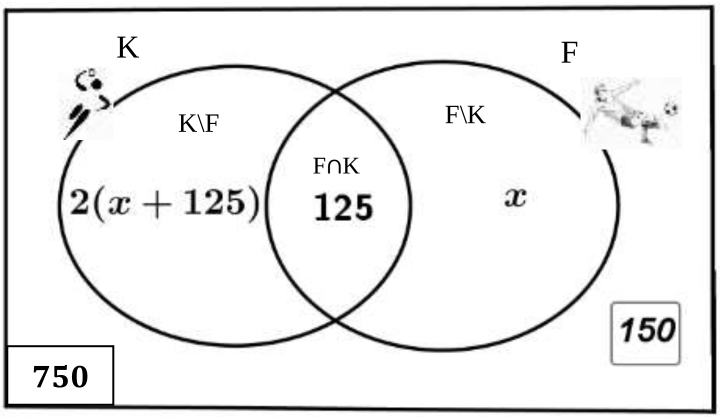
1 pont

b)

Mindkét sportkört a diákok egyhatod része, vagyis $750:6 = 125$ diák választotta.

1 pont

c)



Jelölje a csak focira járok számát: x
Ekkor a focira járok száma összesen: $x + 125$
Így a csak kézilabdázok száma: $2(x + 125)$
Tudjuk, hogy összesen a két sportkörre $750 - 150 = 600$ diák jár
Mivel a csak kézilabdázok, a csak focira járók és a mindkettőre járók diszjunkt (különálló) halmazok, így összesen 600-an vannak.
Így kapjuk a $2(x + 125) + 125 + x = 600$ egyenletet
Az egyenlet megoldása $x = 75$
Válasz: A kézilabdázók száma $2(75 + 125) + 125$=525 fő **7 pont**

d) A focit választók száma: $75 + 125 = 200$ fő **1 pont**

Összesen: 10 pont

4. Egy ABC háromszögben az AB oldal és az AC oldal hossza is 7 cm. Az A csúcsnál lévő belső szög egyenlő a másik két belső szög összegével.

   a) Lehet-e a harmadik oldal hossza 14 cm?
   b) Számítsd ki a háromszög belső szögeinek nagyságát!
   c) Számítsd ki a háromszög területét!
   d) Hány cm hosszú a háromszög BC oldala? Az eredményt egy tizedes jegy pontossággal add meg!
   e) Számítsd ki a háromszög súlyvonalainak hosszát egy tizedes jegy pontossággal

Megoldás:

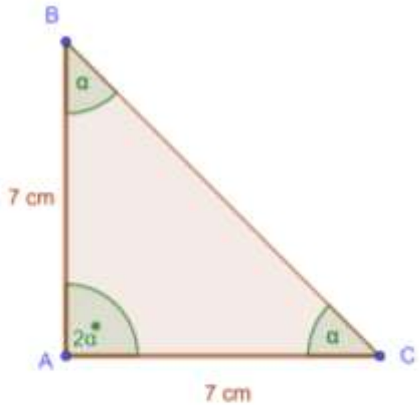
a)

A háromszög-egyenlőtlenség alapján kijelenthetjük, hogy: $BC < AB + AC = 7 + 7 = 14$

Válasz: A harmadik oldal nem lehet 14 cm, mert annál kisebb kell, hogy legyen. **2 pont**

b)

Mivel $AB = 7$ cm és $AC = 7$ cm, ezért a háromszög egyenlő szárú, és az AB, AC oldalakkal szembeni szögek egyenlőek.



Jelöljük a két egyenlő szöget α-val, akkor az A csúcsnál lévő szög 2α lesz.

A háromszög belső szögeinek összegéből következik, hogy $\alpha + \alpha + 2\alpha = 180°$

Az egyenlet megoldása $\alpha = 45°$, amiből következik, hogy a belső szögek: 45°, 45°, 90°

3 pont

c)

A háromszög belső szögeiből következik, hogy a háromszög derékszögű, és a derékszög az A csúcsnál van, így a AB és AC oldalak a befogók.

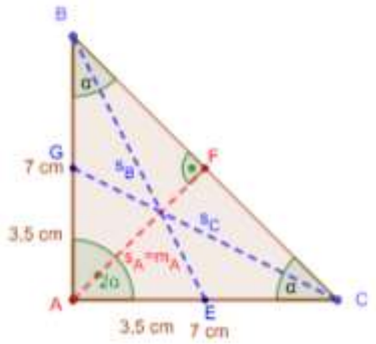
A terület: $T = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{7 \cdot 7}{2} = 24{,}5\ cm^2$ **2 pont**

d) pont:

Mivel a háromszög derékszögű, alkalmazhatjuk a Pitagorasz tételt, amelynek alapján:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 7^2 + 7^2$ =98, tehát $BC = \sqrt{98} \approx 9{,}9$ cm. **2 pont**

e) pont:



Felhasználva azt, hogy a háromszög súlyvonala a csúcsot a szemközti oldal felezési pontjával összekötött szakasz, készítsünk egy ábrát!

Mivel az ABC háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért AEB derékszögű háromszög egybevágó ACB háromszöggel, így:

$$s_B = s_C = \sqrt{3{,}5^2 + 7^2} = \sqrt{61{,}5} \approx 7{,}8 \text{ cm}$$

Mivel az ABC háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért:

$$s_A = m_A = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{98}}{2} \approx 4{,}95 \text{ cm}$$

3 pont

Összesen 12 pont

Megjegyzések:

- Ismét felhasználva, hogy $s_A = m_A$, az s_A kiszámítható az ABC háromszög területének kétféle kiszámításával is:

$$T_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot s_A}{2}$$

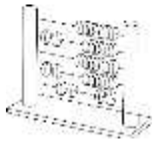
$$\frac{7 \cdot 7}{2} = \frac{\sqrt{98} \cdot s_A}{2} \Longrightarrow s_A = \frac{49}{\sqrt{98}} \approx 4{,}95 \text{ cm}$$

- Természetesen hivatkozhatunk arra is, hogy a derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó súlyvonala éppen a háromszög köré írható kör sugara (R), és megegyezik az átfogó hosszának a felével (Thalész tétele):

$$s_A = R = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{98}}{2} \approx 4{,}95 \text{ cm}$$

5. Jelentsen $A = \overline{20x25y}$ egy olyan hatjegyű számot, amelyben az ezresek helyén álló számjegyet x-szel, az egyesek helyén álló számjegyet pedig y-nal jelöltük! Mit írjunk az x és az y helyébe, hogy

   a) az A a lehető legnagyobb páros szám legyen?
   b) az A osztható legyen 10-zel? Hány ilyen A szám van?
   c) az A osztható legyen 24-gyel? Hány ilyen A szám van?



Válaszodat minden esetben indokold is!

Megoldás:

a)

Az A szám, akkor lesz a legnagyobb páros szám, ha:
- az y helyére a lehető legnagyobb pozitív egyjegyű páros számot írunk: $y = 8$
- az x helyére a lehető legnagyobb pozitív egyjegyű számot írunk: $x = 9$ **2 pont**

b)

Az A szám, akkor és csakis akkor osztható 10-zel ha utolsó számjegye nulla.
Így az y értéke csak 0 lehet, $y = 0$
Az A szám 10-zel való oszthatósága nem függ az x helyére írt számtól.
Az x helyére bármilyen nem negatív egyjegyű egész szám írható (0; 1; … 8; 9).
Így összesen 10 olyan A szám van, amely 10-zel osztható **3 pont**

c) Az A szám akkor és csakis akkor osztható 24-gyel, ha osztható 8-cal és osztható 3-mal is, hiszen $24 = 8 \cdot 3$, és tudjuk, hogy a 8 és 3 relatív prímek $[(8; 3) = 1]$.

Először a 8-cal való oszthatóságot vizsgáljuk.
Egy szám akkor és csakis akkor osztható 8-cal, ha az utolsó három számjegyéből alkotott háromjegyű szám osztható 8-cal.
Így az y értéke csak 6 lehet, $y = 6$

Másodszor a 3-mal való oszthatóságot vizsgáljuk.
Egy szám akkor és csakis akkor osztható 3-mal, ha a számjegyei összege osztható 3-mal.

A számjegyek összege: $2 + 0 + x + 2 + 5 + 6 = 15 + x$

Így az x értékei: $x = 0;\ 3;\ 6;\ 9$

Tehát összesen 4 olyan A szám van, amelyek oszthatók 24-gyel. **9 pont**

Ezek: $200256;\ 203256;\ 206256;\ 209256$

Összesen: 14 pont