XVI. Békés Vármegyei Középiskolai Matematikaverseny 2024/2025

V. kategória

Megoldások

1. Papa 2025 nyarán fogja betölteni a 65. életévét. Eddig minden évben a születésnapján olyan tortát kapott, amelynek a tetején az ábrához hasonló, gyertyából készült szám jelezte, hogy éppen hányadik életévét töltötte be. Ha a tortákon szereplő összes számot leírnánk, hányszor írnánk le a 6-os számjegyet?

Megoldás:

Foglaljuk táblázatba az adatainkat!
Az első tortát Papa egyéves korában kapta, az eddigi utolsót pedig 64 éves korában. A 65.-et 2025 nyarán fogja kapni.

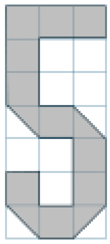
Időintervallum:	6-os számot tartalmazó gyertyák	6-osok száma
1-10.	6	1
11-20.	16	1
21-30.	26	1
31-40.	36	1
41-50.	46	1
51-60.	56; 60	2
61-64.	61; 62; 63; 64	4
	A gyertyákon lévő 6-osok száma összesen:	11

Tehát ha az eddigi tortákon szereplő összes számot leírnánk, 11-szer írnánk le a 6-os számjegyet.

Összesen: 6 pont

Megjegyzés: a 65. születésnapos gyertyát azért nem kell figyelembe venni, mert Papa 2025 nyarán lesz csak 65 éves. Ez a torta még nem készült el.

2. Bob és Bobek az új, a 2025-ös évszám utolsó számjegyét, az 5-öst szerkesztette meg egy négyzetrácsos papírra. Bob megtervezte, Bobek pedig kifestette szürkére a mellékelt ábra szerint (vagy egy kis négyzetet vagy egy kis négyzetnek az átlóval kettéosztott egyik részét festette ki).



   a) Hány cm^2-t festett be Bobek, ha a kis négyzetek oldalai 10 cm-esek?

   Bobek a „festés végén” azt állította, hogy a teljes papír több mint a felét befestette.

   b) Igazat mondott-e Bobek? Indokold is válaszod!

Megoldás:

a) Hány cm^2-t festett be Bobek, ha a kis négyzetek oldalai 10 cm-esek?

Az ábráról könnyen leolvasható, megszámlálható, hogy Bobek 10 db kis négyzetet és 4 db (egybevágó, egyenlő szárú derékszögű) kis háromszöget festett ki.

1 db kis négyzet területe $10 \cdot 10 = 100$ cm^2, így a 10 db kis négyzet területe 1000 cm^2.

1 db kis (egyenlő szárú derékszögű) háromszög területe $\frac{10 \cdot 10}{2} = 50$ cm^2, így a 4 db kis háromszög területe $4 \cdot 50 = 200$ cm^2.

Így a Bobek által kifestett terület összesen $1000 + 200 = 1200$ cm^2.

4 pont

Bobek a festés végén azt állította: szerintem a teljes papír több mint a felét befestettem.

b) Igazat mondott-e Bobek? Indokold is válaszod?

A számtáblán összesen $3 \cdot 7 = 21$ db kis négyzet van, melyek összes területe $21 \cdot 100 = 2100$ cm^2. Ennek a fele $\frac{2100}{2} = 1050$ cm^2.

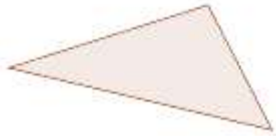
Mivel a festett rész területe 1200 cm^2, ami az 1050 cm^2-nél nagyobb.

Tehát Bobek igazat mondott.

4 pont

Összesen: 8 pont

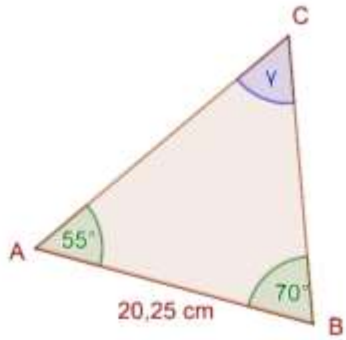
3. Az ABC háromszögben az AB oldal 20,25 cm, az A csúcsnál lévő belső szög $55°$-os, míg a B csúcsnál lévő belső szög $70°$-os.
   a) Készíts a megadott adatokat tartalmazó vázlatos ábrát!
   b) Számítsd ki a háromszög harmadik belső szögének nagyságát!
   c) Milyen hosszú a háromszög BC oldala?



Megoldás:

a) Készíts a megadott adatokat tartalmazó vázlatos ábrát!

2 pont



b) Számítsd ki a háromszög harmadik belső szögének nagyságát!

Felhasználhatjuk az alapadatokat tartalmazó ábránkat (a)), abban a harmadik belső szöget jelöljük γ-val!

Mivel a háromszög belső szögeinek összege $180°$, ezért

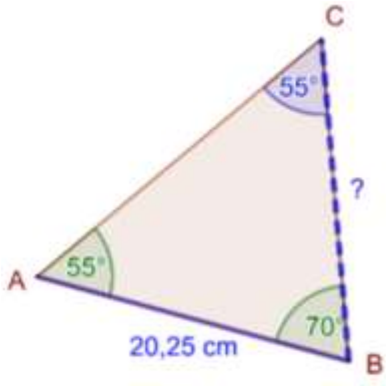
$$55° + 70° + \gamma = 180°$$

$$\boldsymbol{\gamma = 55°}$$

Tehát a háromszög harmadik belső szöge $\boldsymbol{\gamma = 55°}$

3 pont

c) Milyen hosszú a háromszög BC oldala?



A b) vázlatpontban kapott eredményt ($\boldsymbol{\gamma = 55°}$) felhasználva megállapíthatjuk, hogy az ABC háromszögnek van két egyenlő szöge, amiből az is következik, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú háromszög, tehát van két egyenlő oldala is.

Felhasználva azt a szabályt (tételt), hogy a háromszög két egyenlő oldala a két egyenlő szöggel szemben van, így $BC = AB = 20{,}25$ cm.

Tehát az ABC háromszög BC oldala 20,25 cm hosszú:

$$\boldsymbol{BC = 20{,}25\ \text{cm}}$$

5 pont

Összesen: 10 pont

4. Palkó és Peti az alább látható öt számkártyával játszott.

8 **0** **9** **0** **6**

Palkó kiválasztott közülük kettőt, a maradék három kártya Petié lett. Mind a ketten a náluk lévő összes kártya felhasználásával ki tudtak rakni egy-egy 10-zel osztható számot.

a) Írj le egy lehetőséget, hogy milyen számot rakhatott ki Palkó és Peti!
b) Ezen a lehetőségen kívül találsz-e még ilyen számpárokat? Keresd meg az összes ilyen tulajdonságú kétjegyű-, illetve háromjegyű számból álló számpárt!
Írd le azt is, hogyan gondolkodtál!

Megoldás:

a) Írj le egy lehetőséget, milyen számot rakhatott ki Palkó és Peti!

Ahhoz, hogy a feltételeknek megfelelően mind a ketten 10-zel osztható számot tudjanak kirakni, mind a kettőjüknek kell 0-s számkártya. Vagyis az egyik 0 Palkóé kell, hogy legyen, a másik 0 pedig Petié.

Felhasználva a 10-zel való oszthatóság szabályát, a 0-ra végződést, egy lehetőség:

Palkó: 80 Peti: 960

4 pont

b) Ezen a lehetőségen kívül találsz-e még ilyen számpárokat? Keresd meg az összes ilyen tulajdonságú kétjegyű-, illetve háromjegyű számból álló számpárt!

Palkó a 0 mellé a 6-ost, a 9-est vagy a 8-ast választhatja, és ezeknek a jegyeknek mind a tízesek helyére kell kerülniük (a 0 nem állhat legelöl). Peti már nem választhat, neki a „maradék" jut.

Ha Palkó a 6-ost választja (60), Petinek a 0 mellett marad a 8-as és a 9-es (890 vagy 980).

Ha Palkó a 8-ast választja (80), Petinek a 0 mellett marad a 6-os és a 9-es (690 vagy 960).

Ha Palkó a 9-est választja (90), Petinek a 0 mellett marad a 6-os és a 8-as (680 vagy 860).

Peti esetében felhasználtuk azt, hogy a neki jutott két, 0-tól különböző számkártya csak a százasok és a tízesek helyére kerülhet, ezek felcserélésével két db háromjegyű számot kapunk (mindkettőnél az egyesek helyén a 0 áll).

Foglaljuk táblázatba a lehetőségeket!

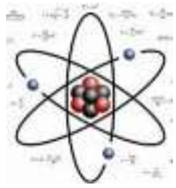
Palkó választása a 0 mellett:	Palkó száma:	Petinek marad még a 0 mellett:	Peti számai:	db
6	60	8; 9	890	1.
	60		980	2.
8	80	6; 9	690	3.
	80		960	4.
9	90	6; 8	680	5.
	90		860	6.

Tehát 6 db, a feltételeknek megfelelő számpárt találtunk.

8 pont

Összesen: 12 pont

5. Egy osztályban kétféle szakkörre jelentkezhettek a diákok: matematikára, illetve fizikára. Csak matematika-szakkörre jelentkezett 14 tanuló, mindkét szakkört 6-an választották. A fizikaszakkörre jelentkezők száma a matematika-szakkörre jelentkezők számának a 80 %-a volt.



a) Hányan jártak matematika-szakkörre?
b) Hányan jártak fizikaszakkörre?
c) Mekkora volt az osztály létszáma, ha mindenki járt legalább az egyik szakkörre?
d) Készíts a létszámokat is tartalmazó halmazábrát!

Megoldás:

a) Hányan jártak matematika-szakkörre?

Vezessük be a következő halmazjelöléseket!

$$O = \{\text{osztály tanulói}\}$$

$$M = \{\text{matematika} - \text{szakkörösök}\}$$

$$F = \{\text{fizikaszakkörösök}\}$$

$$\Downarrow$$

$$M \cap F = \{\text{mindkét szakkörre járnak}\}$$

A feltételek alapján az egyes részhalmazok elemszáma a következő:

$$|M \cap F| = 6 \qquad |M \setminus F| = 14$$

Ennek a két részhalmaznak nincs közös eleme (diszjunktak), az uniójuk kiadja a matematika-szakkörre járókat:

$$|M| = |M \setminus F| + |M \cap F| = 14 + 6 = 20$$

Tehát a matematika-szakkörre 20-an jártak.

3 pont

b) Hányan jártak fizikaszakkörre?

Mivel a fizikaszakkörre jelentkezők száma a matematika-szakkörre jelentkezők számának a 80 %-a volt, ezért a fizikaszakkörre $20 \cdot 0{,}8 = 16$ tanuló járt ($|F| = 16$).

3 pont

c) Mekkora volt az osztály létszáma, ha mindenki járt legalább az egyik szakkörre?

Mivel mindenki járt valamilyen szakkörre, ezért az osztály létszáma megegyezik a szakkörösök létszámával. Ennek a kiszámítása többféleképpen lehetséges.

Egyik lehetőség (logikai szita):

$$|O| = |M \cup F| = |M| + |F| - |M \cap F| = 20 + 16 - 6 = 30$$

Másik lehetőség (két diszjunkt halmaz egyesítése): összeadjuk a csak matematika-szakkörre járók számát a fizikaszakkörre járók számával.

$$|O| = |M \setminus F| + |F| = 16 + 14 = 30$$

Harmadik lehetőség (három diszjunkt halmaz egyesítése):

Ehhez előbb ki kell számolni a csak fizikaszakkörre járó tanulók számát:

$$|F \setminus M| = |F \setminus (M \cap F)| = |F| - |M \cap F| = 16 - 6 = 10$$

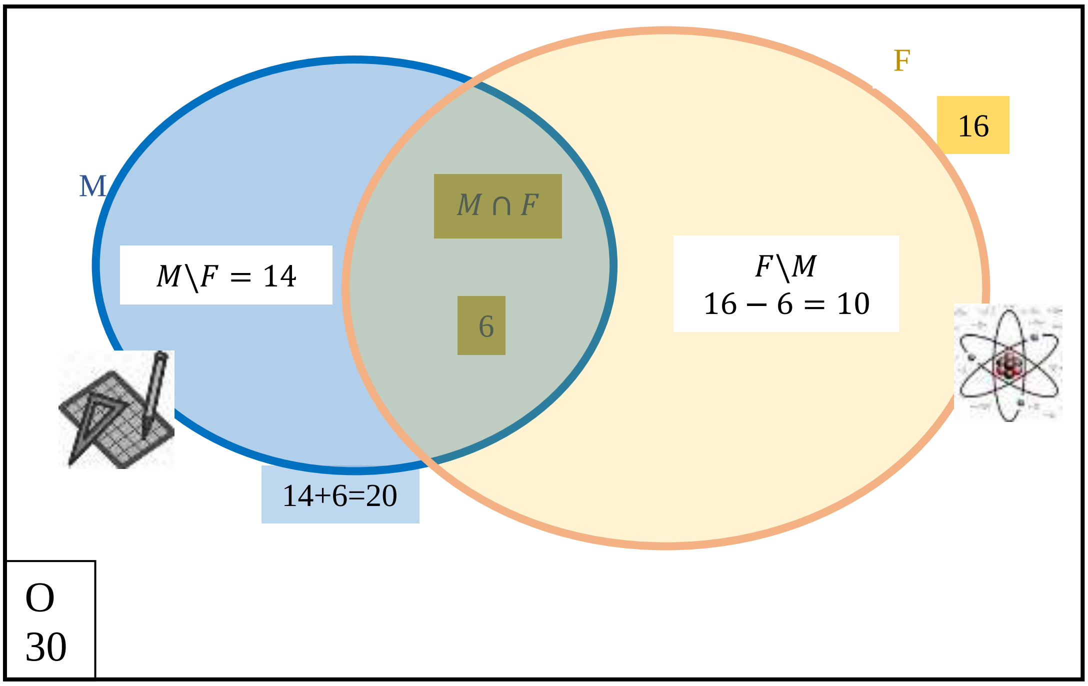
Ezt az eredményt felhasználva:

$$|O| = |M \setminus F| + |M \cap F| + |F \setminus M| = 14 + 6 + 10 = 30$$

Tehát az osztály létszáma (mindhárom esetben) 30 fő.

4 pont

d) Készíts a létszámokat is tartalmazó halmaz-ábrát!



4 pont

Összesen: 14 pont

Megjegyzés:

Nem szükséges precíz halmazelméleti jelölésekkel, szabályokkal indokolni a kapott eredményeket, de látni kell a gondolat menetét és az egyszerű számolásokat, rövid indoklásokat