

XVII. Békés Vármegyei Középiskolai Matematikaverseny

2025/2026

III. kategória

Megoldások

1. A levegő hőmérsékletét *Celsius-fokban* ($^{\circ}\text{C}$ / és *Fahrenheit-fokban* ($^{\circ}\text{F}$) is mérik. Mindkét skála egyenletes beosztású skála: a kétfajta mértékegységgel a víz fagyáspontja $0^{\circ}\text{C} = 32^{\circ}\text{F}$, a víz forráspontja $100^{\circ}\text{C} = 212^{\circ}\text{F}$.

Egy őszi napon az alábbi hőmérsékleti adatokat mérték: 2°C , 4°C , 9°C , 6°C

- a) Adjuk meg a négy mérési adatot *Fahrenheit-fokban* (egy tizedes jegyre kerekítve)!
- b) Mennyi a mért adatok átlaga, mediánja, módusza *Celsius-fokban*?
- c) Hány négyjegyű számot képezhetünk a 2; 4; 6; 9 számjegyekből, ha a számjegyeket minden számban egyszer használhatjuk fel? Mennyi a kapott négyjegyű számok terjedelme?

Megoldás (2 pont + 2 pont + 2 pont = 6 pont):

- a) 100 beosztás a Celsius skálán 180 beosztásnak felel meg a Fahrenheit skálán. Tehát 1 Celsius beosztás $\frac{9}{5}$ Fahrenheit beosztással egyenlő, az átszámítás a $^{\circ}\text{F} = 32 + ^{\circ}\text{C} \cdot \frac{9}{5}$ képlettel megoldható.

$$2^{\circ}\text{C} = 35,6^{\circ}\text{F}; \quad 4^{\circ}\text{C} = 39,2^{\circ}\text{F} \quad 6^{\circ}\text{C} = 42,8^{\circ}\text{F} \quad 9^{\circ}\text{C} = 48,2^{\circ}\text{F}$$

- b) 2; 4; 9; 6 adatok átlaga $\frac{2+4+9+6}{4} = 5,25$
2; 4; 6; 9 rendezett adatok mediánja $\frac{4+6}{2} = 5$
2; 4; 9; 6 adatoknak nincs módusza

- c) A 2, 4; 9; 6 számok összes sorrendje $4! = 24$, ennyi négyjegyű képezhető.
A fenti számú négyjegyűeknél a legnagyobb a 9642, a legkisebb a 2469, így a terjedelmük $9642 - 2469 = 7173$.

2. Gyümölcsboltban jártunk.

- a) Az egyik nap 5 kg Golden típusú almát vásároltunk 650 Ft/kg egységáron. A következő nap szintén vettünk ugyanitt 8 kg Golden almát, viszont ekkor már 20% -ot engedtek az alma tegnapi egységárából. Átlagosan hány Ft -os egységárban kellett volna megvásárolnunk a 13 kg almát, hogy a kiadásunk ugyanannyi legyen?
- b) A bolt kirakatába 9 db almás láda fér el: 4 láda Jonatán almás, 4 láda Golden almás, 1 láda Idared fajtájú almás láda. Hányféle sorrendbe tudják kirakni a bejárat ajtótól tekintve balról jobbra egy sorba a kirakatban az almás ládákat, ha az azonos fajtájú almákat tartalmazó ládákat nem különböztetjük meg egymástól?

Megoldás (5 pont + 3 pont = 8 pont):

- a) Az első napon $5 \cdot 650 = 3250\text{ Ft}$ -ért vásároltunk almát.

A második napon a 20% -os kedvezmény miatt $8 \cdot 650 \cdot 0,8 = 4160\text{ Ft}$ -ért vásároltunk almát.

Tehát a két napon vett 13 kg alma egységára összeségében

$$\frac{3250+4160}{13} = 570\text{ Ft volt.}$$

- b) A 9 db almás láda kihelyezésének összes sorrendjét (ismétléses permutációval) megkapjuk az alábbi számítással:

$$\frac{9!}{4! \cdot 4!}$$

Az összes sorrend:

$$\frac{9!}{4! \cdot 4!} = 630$$

3. Évszámokról

- a) Határozzuk meg a 2026 pozitív osztóit, valamint a 2025 és a 2026 legnagyobb közös osztóját és a 2025 és a 2026 legkisebb közös többszörösét?
- b) Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amellyel megszorozva 2024-et, köbszámot (egy egész szám köbét) kapunk?

Megoldás (7 pont + 3 pont = 10 pont):

a) Bontsuk fel 2026-ot prímtényezők szorzatára: $2026 = 2 \cdot 1013$

Így 2026 osztói: 1; 2; 1013; $2 \cdot 1013 = 2026$ (4 db osztó)

Mivel 2025 és 2026 két egymást követő természetes szám, így legnagyobb közös osztójuk 1 (relatív prímek).

Bontsuk fel 2025-öt prímtényezők szorzatára: $2025 = 3^4 \cdot 5^2$

2025 és 2026 legkisebb közös többszörösét a két szám prímtényezői felbontásának felhasználásával kapjuk: kiválasztjuk a két felbontásból az összes előforduló különböző prímszámot a nagyobb kitevővel és ezeket összeszorozzuk.

A legkisebb közös többszörös: $2 \cdot 1013 \cdot 3^4 \cdot 5^2 = 4\,102\,650$.

b) Bontsuk fel 2024-et prímtényezők szorzatára: $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$

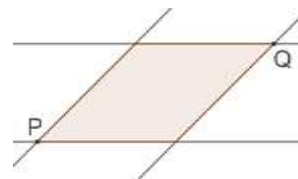
Olyan szorzót kell választanunk 2024-hez, hogy a szorzat prímtényezői alakjában minden prímszám kitevője 3-mal osztható szám legyen. Tehát $2^3 \cdot 11 \cdot 23$ -at 11^2 -nel és 23^2 -nel kell megszorozni, hogy egy egész szám köbe kialakuljon: a legkisebb keresett szorzó $11^2 \cdot 23^2 = 64\,009$, így $2^3 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 11^2 \cdot 23^2 = 2^3 \cdot 11^3 \cdot 23^3 = (2 \cdot 11 \cdot 23)^3 = 506^3$

4. Két egyforma szélességű úttest keresztezi egymást az ábrán látható módon. Az utak szélessége mindenütt 6 m, az ábrán lévő P és Q jelzőpontok távolsága 10 m.

a) Milyen négyszög a két útfelület közös része, a sátozott rész?

Indokoljuk válaszunkat!

b) Mekkora a két útfelület közös részének területe a kereszteződésnél?

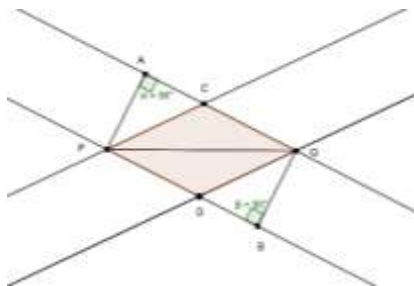


Megoldás (3 pont + 9 pont = 12 pont):

a) A két útfelület közös része paralelogramma, mert szemközti oldalai párhuzamosak.

Az utak közös része olyan paralelogramma, melynek oldalai egyenlők az utak egyforma szélessége miatt (a közös rész szimmetrikus a PQ szakaszra), ezért a közös rész rombusz. A lenti ábrán PAC és a QBD háromszögek egybevágóságából is következik, hogy a paralelogramma rombusz.

b) Tekintsük a két útfelület metszését:



Merőlegest állítottunk P és Q pontokból a szemközti útszegélyre, párhuzamosra, s így kaptuk az A és B pontokat, illetve C és D pontokkal jelöltük az útszegélyek metszéspontjait.

$APBQ$ négyszög téglalap, melynél $AP = 6$, $PQ = 10$.

$PCQD$ négyszög rombusz, melynél $PC = CQ$.

Írjuk fel a Pitagorasz-tételt például a PAC és PAQ derékszögű háromszögekre:

$$PA^2 + AC^2 = PC^2$$

$$PA^2 + AQ^2 = PQ^2$$

$PA = 6$, $PQ = 10$ és legyen $AC = x$, $PC = CQ = y$

Így egy kétismeretlenes egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{cases} 6^2 + x^2 = y^2 \\ 6^2 + (x + y)^2 = 10^2 \end{cases}$$

A második egyenletből meghatározhatjuk $(x + y)$ -t:

$$x + y = 8, \text{ vagyis } y = 8 - x$$

Ezt az első egyenletbe helyezve kapjuk x -et, $x = 1,75$ m.

1 pont

Visszahelyettesítéssel $y = 8 - 1,75 = 6,25$ m.

A két útszakasz közös része az y oldalú $PCQD$ rombusz területe, melynél 6 m a négyszög magassága:

$$t = 6,25 \cdot 6 = 37,5 \text{ m}^2$$

5. Legyen adott a valós számokon értelmezett $f(x) = |x - 1| \cdot (|x| - 1)$ függvény!
a) Határozzuk meg az $f(x)$ függvény zérushelyeit!
b) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$|x - 1| \cdot (|x| - 1) = 3$$

Megoldás (4 pont + 10 pont = 14 pont):

- a) $f(x)$ két kifejezés szorzata, tehát zérushelyét megkapjuk, amikor az egyik vagy másik tényezője nulla lesz.

Ez $|x - 1| = 0$ esetén $x = 1$ -nél, $|x| - 1 = 0$ esetén $x = \pm 1$ -nél következik be.
tehát $f(x)$ -nek kettő zérushelye van: $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$.

- b) $|x - 1| \cdot (|x| - 1) = 3$

a valós számokon értelmezhető egyenlet értelmezési tartományát az abszolútértékes kifejezések zérushelyei tekintetében 3 részre bonjuk és ezeken a számhalmazokon vizsgáljuk a megoldási lehetőségeket.

Ha $x \leq 0$, akkor a $-(x - 1) \cdot (-x - 1) = 3$ egyenletet oldjuk meg.

Rendezéssel az $x^2 - 1 = 3$, egyenletet kapjuk, melynek gyökei az $x = \pm 2$

Viszont a fenti értelmezésnél csak az $x_1 = -2$ lehet a megoldás.

Ha $0 < x \leq 1$ tartományon vizsgáljuk az egyenletet, akkor $-(x - 1) \cdot (x - 1) = 3$ egyenletet kell megoldanunk.

Rendezéssel az $(x - 1)^2 = -3$ egyenletet kapjuk, amelynek nincs gyöke.

Ha $1 < x$ halmazon tekintjük az eredeti egyenletet, akkor helyette az $(x - 1)^2 = 3$ egyenlethez jutunk, melynek gyökei $x = \pm\sqrt{3} + 1$.

A fenti rész értelmezési halmazon az $x = \sqrt{3} + 1$ lehet megoldás.

Az $x_1 = -2$ és az $x_2 = \sqrt{3} + 1$ ellenőrzéssel helyesnek bizonyulnak.