

XVII. Békés Vármegyei Középiskolai Matematikaverseny

2025/2026

II. kategória

Megoldások

1. Egy mezőn élt néhány nyúl. Számuk egy év alatt kettő hóján a háromszorosára nőtt. Egy újabb év elteltével pedig (az előző évihez képest) megötszöröződött. A 3. évben annyival csökkent a számuk, amennyi nyúl eredetileg a mezőn volt. Ekkor 12-szer annyi nyúl volt a mezőn, mint eredetileg, és még 6. Hány nyúl volt eredetileg a mezőn?

Megoldás (6 pont):

Legyen a nyulak jelenlegi száma x .

Egy év múlva lesz $3x - 2$,

két év múlva pedig $5(3x - 2)$

A 3. év végi csökkenés után: $5(3x - 2) - x = 12x + 6$

$$15x - 10 - x = 12x + 6$$

$$2x = 16$$

$$\underline{x = 8}$$

Ellenőrzés: egy év múlva 22 nyúl, két év múlva 110 nyúl, a 3. évben $110 - 8 = 102$ nyúl.
 $12 \cdot 8 = 96$; $96 + 6 = 102$

Válasz: Eredetileg **8** nyúl volt a mezőn.

2. A Descartes-féle koordináta-rendszer rácspontjainak nevezzük azokat a pontokat, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám, pl. $R(-2; 3)$.

a) Hány rácsponton halad át az $f(x) = 2026 \cdot x$ függvény grafikonja, ha $x \in R$?

b) Hány rácsponton halad át a $g(x) = \frac{4}{x}$ függvény grafikonja, ha $x \in R \setminus 0$?

Megoldás (3 pont + 5 pont = 8 pont):

a) Hány rácsponton halad át az $f(x) = 2026 \cdot x$ függvény grafikonja, ha $x \in R$?

Mivel az $f(x) = 2026 \cdot x$ függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza $\{x \in R\}$, ezért minden egész x -re is értelmezett ($Z \subset R$).

A hozzárendelési szabály minden egész x -hez egész helyettesítési értéket rendel ($2006x$).

Mivel az egész számok halmaza végtelen sok elemből áll, így a grafikon végtelen sok rácsponton fog áthaladni.

b) Hány rácsponton halad át a $g(x) = \frac{4}{x}$ függvény grafikonja, ha $x \in R \setminus 0$?

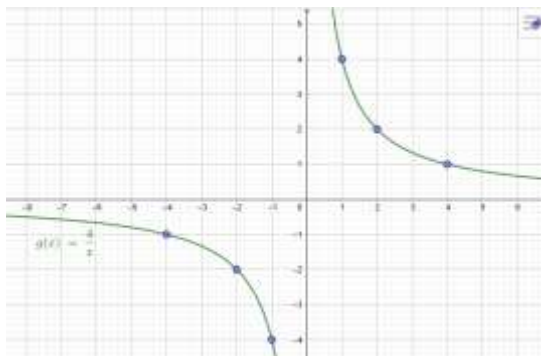
A $g(x) = \frac{4}{x}$ függvény értelmezési tartománya $x \in R \setminus 0$. Ezen a halmazon kell keresni azokat az x egész számokat, amelyek esetén a $g(x) = \frac{4}{x}$ függvénynek egész helyettesítési értéke lesz.

Ezek azok az x egész számok lesznek, amelyek a 4-nek osztói.

A 4 osztói: $\pm 1; \pm 2; \pm 4$

Tehát a $g(x) = \frac{4}{x}$ függvény grafikonja 6 rácsponton halad át.

Ezek a pontok: $(-4; -1); (-2; -2); (-1; -4); (1; 4); (2; 2); (4; 1)$



3. Vegyük az $a^2b + ab$ és az $ab^2 + ab$ algebrai kifejezések helyettesítési értékeit, ha $a = 8$ és $b = 17$.

- a) Határozd meg a két helyettesítési érték legnagyobb közös osztóját és a legkisebb közös többszörösét!
- b) Egy (nem átlátszó) dobozban 8 sárga, 17 piros és 2 fekete golyó van. Bekötött szemmel legkevesebb hány golyót kell kivenni a dobozból ahhoz, hogy biztosan legyen a kihúzottak között legalább 1 db fekete vagy 1 db piros golyó?
- c) Ha egy golyót véletlenszerűen kiveszünk ebből a dobozból, mi az esélye annak, hogy az nem lesz se piros, se sárga?

Megoldás (2 pont + 4 pont + 4 pont = 10 pont):

- a) Határozd meg a két helyettesítési érték legnagyobb közös osztóját és a legkisebb közös többszörösét!

Helyettesítési értékek $a = 8$ és $b = 17$ esetén: $a^2b + ab = 8^2 \cdot 17 + 8 \cdot 17 = 1224$, illetve $ab^2 + ab = 8 \cdot 17^2 + 8 \cdot 17 = 2448$.

A legnagyobb közös osztó: $(1224; 2448) = 1224$

A legkisebb közös többszörös: $[1224; 2448] = 2448$

- b) Egy (nem átlátszó) dobozban 8 sárga, 17 piros és 2 fekete golyó van. Bekötött szemmel legkevesebb hány golyót kell kivenni a dobozból ahhoz, hogy biztosan legyen a kihúzottak között legalább 1 db fekete vagy 1 db piros golyó

Azt célszerű megkeresni, hogy hány golyót tudunk kivenni maximálisan (legtöbb), hogy ne legyen benne se fekete, se piros. Ez akkor következik be, ha először kivesszük az összes (8 db) sárga golyót (ezt meg is tudjuk tenni).

Ha kihúztuk az összes (8) sárga golyót, akkor a 9. golyó kihúzásakor már biztosan feketét vagy pirosat húzunk, hiszen már csak ilyenek maradtak a dobozban.

Abban az esetben, ha az első 8 húzás nem mindegyike sárga, akkor az csak fekete vagy piros lehet. Így nem kellene 9 húzás a kívánt eredményhez, de ez az eset nem biztos.

Tehát legkevesebb 9 golyót kell kivenni a dobozból ahhoz, hogy biztosan legyen a kihúzottak között legalább 1 db fekete vagy 1 db piros golyó

- c) Ha egy golyót véletlenszerűen kiveszünk ebből a dobozból, mi az esélye annak, hogy az nem lesz se piros, se sárga?

A dobozból összesen $8 + 17 + 2 = 27$ golyót vehetünk ki, ez az összes esetek száma.

Ahhoz, hogy se pirosat, se sárgát ne húzzunk, csak feketét húzhatunk. Ezek száma 2, ez a kedvező esetek száma.

A klasszikus valószínűségi modell alapján:

$$P(\text{se piros, se sárga}) = P(\text{fekete}) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{2}{27} \approx 0,07 \approx 7 \%$$

Tehát $\frac{2}{27} \approx 0,07 \approx 7 \%$ valószínűséggel veszünk ki a dobozból egy golyót, hogy az nem lesz se piros, se sárga?

4. *András, Béla, Cili, Dóra, Emil és Flóra* színházba mennek, a jegyük egymás melletti 6 helyre szól. Sorsolással döntenek el, hogyan üljenek le a 6 helyre.
- a) Hányféleképpen ülhetnek le, ha a fiúk és a lányok váltakozva foglalnak helyet?
 - b) Hányféleképpen ülhetnek le, ha a 3 lány egymás mellett szeretne ülni?
 - c) Hányféleképpen ülhetnek le, ha András és Cili nem szeretne egymás mellett ülni?

Megoldás (3 pont + 4 pont + 5 pont = 12 pont):

- a) Hányféleképpen ülhetnek le, ha a fiúk és a lányok váltakozva foglalnak helyet?

A fiúk csak a fiúk között cserélődhetnek, a lehetséges sorrendjük $3!$.

A lányok csak a lányok között cserélődhetnek, a lehetséges sorrendjük szintén $3!$.

Minden fiú sorrendhez tartozik $3!$ lány sorrend, ezért a fiúk-lányok lehetséges sorrendje: $3! \cdot 3!$

Mivel a sor kezdődhet fiúval vagy lánnyal, így az összes lehetőségek száma: $2 \cdot 3! \cdot 3! = 72$

- b) Hányféleképpen ülhetnek le, ha a 3 lány egymás mellett szeretne ülni?

3 lányt egy elemnek tekintve + a 3 fiú – ez 4 elem lehetséges sorrendje, azaz $4!$

A lányok lehetséges sorrendje $3!$

Mivel minden fix lány sorrendhez $4!$ össz sorrend tartozik, így a lányok-fiúk sorrendje: $3! \cdot 4! = 144$

- c) Hányféleképpen ülhetnek le, ha András és Cili nem szeretne egymás mellett ülni?

Komplementer módszer, először számoljuk ki, ha András és Cili egymás mellett ülnek!

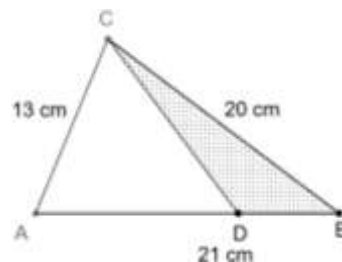
Andrást és Cilit egy elemnek véve, hozzávéve a többieket (+4 elem), ez 5 elem lehetséges sorrendje: $5!$

András és Cili helyet is cserélhet, ezért a „rossz” esetek száma: $2 \cdot 5! = 240$

Minden feltétel nélkül a 6 gyerek $6!$ féle sorrendben ülhetne le.

A komplementer képzés miatt így a „jó”, a feltételnek megfelelő sorrendek száma („jó” = összes - „rossz”): $6! - 2 \cdot 5! = 720 - 240 = 480$.

5. Az ábrán látható ABC háromszög oldalai $AB = 21\text{ cm}$, $BC = 20\text{ cm}$, $AC = 13\text{ cm}$. Az AB oldalon felvesszünk egy D pontot úgy, hogy az ADC háromszög kerülete egyezzen meg a BCD háromszög kerületével!



- Milyen hosszú szakaszokra osztja a D pont az AB oldalt?
- Milyen messze van a C pont az AB oldaltól?
- Mekkora a BCD (pontosított) háromszög területe?

Megoldás (4 pont + 7 pont + 3 pont = 14 pont):

- Milyen hosszú szakaszokra osztja a D pont az AB oldalt?

Jelöljük: $DC = d$; $AD = x$

Mivel $k_{ADC} = k_{BCD}$,

ezért $13 + x + d = d + (21 - x) + 20$

innen: $13 + x = 41 - x$

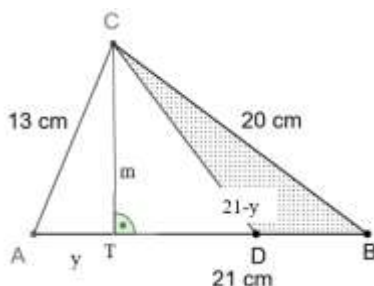
$$2x = 28$$

$$\underline{x = 14}$$

Tehát: $AD = 14\text{ cm}$, $DB = 21 - 14 = 7\text{ cm}$

- Milyen messze van a C pont az AB oldaltól?

A kérdéses távolság az ABC háromszög c oldalhoz tartozó magassága, az ábrán m .



Az $AT = y$, $TB = 21 - y$; az ATC illetve TCB derékszögű háromszögekre Pitagorasz-tételt felírva:

$$\begin{cases} y^2 + m^2 = 13^2 \\ (21 - y)^2 + m^2 = 20^2 \end{cases}$$

A második egyenletből vonjuk ki az első egyenletet!

$$(21 - y)^2 - y^2 = 400 - 169$$

$$441 - 42y + y^2 - y^2 = 231$$

$$210 = 42y$$

$$\underline{y = 5}$$

Visszahelyettesítve az első egyenletbe:

$$5^2 + m^2 = 169$$

$$m^2 = 169 - 25 = 144$$

Négyzetgyököt vonva ($m > 0$):

$$\underline{m = 12}$$

Tehát a C pont távolsága az AB oldaltól 12 cm .

c) Mekkora a BCD (pontosított) háromszög területe?

A DB oldal az a) vázlatpont alapján: 7 cm .

A BCD háromszög DB oldalához tartozó magassága a b) vázlatpont alapján szintén az $m = 12\text{ cm}$.

Ezért a BCD (pontosított) háromszög területe:

$$t_{BCD} = \frac{7 \cdot 12}{2} = 42\text{ cm}^2$$