

XVII. Békés Vármegyei Középiskolai Matematikaverseny

2025/2026

I. kategória

Megoldások

1. Számolgassunk!

- a) Az $1 : 2 : 3 : 4 : 5$ kifejezést, műveletsort különböző helyeken zárójelezve eltérő eredményeket kapunk. Adjunk meg egy olyan zárójelezést, hogy a műveletsor eredménye $\frac{2}{15}$ legyen!
- b) Számológép használata nélkül határozd meg, hogy a $\frac{2^{1013}-1}{2^{1013}}$ és a $\frac{2^{2026}-1}{2^{2026}}$ közül melyik szám a nagyobb

Megoldás (3 pont + 3 pont = 6 pont):

- a) Az $1 : 2 : 3 : 4 : 5$ kifejezést, műveletsort különböző helyeken zárójelezve eltérő eredményeket kapunk. Adjunk meg egy olyan zárójelezést, hogy a műveletsor eredménye $\frac{2}{15}$ legyen.

$$(1 : 2) : (3 : 4) : 5 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} : 5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} : 5 = \frac{\frac{2}{3}}{5} = \frac{2}{15}$$

- b) Számológép használata nélkül határozd meg, hogy a $\frac{2^{1013}-1}{2^{1013}}$ és a $\frac{2^{2026}-1}{2^{2026}}$ közül melyik szám a nagyobb!

$$\frac{2^{1013}-1}{2^{1013}} = \frac{2^{1013}}{2^{1013}} - \frac{1}{2^{1013}} = 1 - \frac{1}{2^{1013}}$$
$$\frac{2^{2026}-1}{2^{2026}} = \frac{2^{2026}}{2^{2026}} - \frac{1}{2^{2026}} = 1 - \frac{1}{2^{2026}}$$

Mivel $2^{2026} > 2^{1013}$, ezért $\frac{1}{2^{2026}} < \frac{1}{2^{1013}}$, ebből meg az következik, hogy $1 - \frac{1}{2^{2026}} > 1 - \frac{1}{2^{1013}}$

Tehát:

$$\frac{2^{1013}-1}{2^{1013}} < \frac{2^{2026}-1}{2^{2026}}$$

2. Az erdő kitermelésekor a kivágott fák tömegének 40 %-a hulladék lesz, amíg eljut a gyár udvarára. A gyárban való feldolgozás során a feldolgozható mennyiség további 35 %-a lesz veszteség a kész termékhez jutásig.

- a) Hány tonna kész termék állítható elő 30 tonna élő fa kivágásából?
- b) Hány tonna élő fa levágásából keletkezik 5 tonna kész termék? Egy tizedes jegyre kerekíts!

Megoldás (3 pont + 5 pont = 8 pont):

- a) Hány tonna kész termék állítható elő 30 tonna élő fa kivágásából?
Ha a kivágott fák tömegének 40%-a hulladék, akkor a gyár udvarára 60% jut el, ott ismét 35% hulladék, akkor 65%-ból lesz kész termék.
Tehát $(30 \cdot 0,60) \cdot 0,65 = 18 \cdot 0,65 = 11,7$ tonna kész termékhez jutunk
- b) Hány tonna élő fa levágásából keletkezik 5 tonna kész termék? Egy tizedes jegyre kerekíts!
Legyen a levágott élő fák tömege x tonna, ekkor $(x \cdot 0,60) \cdot 0,65 = 5$, ennek megoldása $x = 12,8$
Tehát 12,8 tonna élő fa levágásából keletkezik 5 tonna kész termék.

3. Lányok és fiúk az osztályokban

- a) Dóra osztályában a lányok száma 18. Az osztályban a fiúk és a lányok számának aránya 2: 3. Mennyi az osztály létszáma, és hány fiú jár az osztályba?
- b) Béla osztályában a fiúk és a lányok számának aránya 4: 5. Ha a fiúk száma 2-vel több lenne, és a lányok száma 3-mal kevesebb, akkor a fiúk és a lányok számának aránya 7: 6 lenne. Hány fiú és hány lány jár Béla osztályába?

Megoldás (4 pont + 6 pont = 10 pont):

- a) Dóra osztályában a lányok száma 18. Az osztályban a fiúk és a lányok számának aránya 2: 3. Mennyi az osztály létszáma, és hány fiú jár az osztályba?
Ha a fiúk és lányok aránya 2:3, akkor a fiúk száma = $2x$, a lányok száma = $3x$
Mivel a lányok száma 18, ezért $3x = 18$, amiből kapjuk, hogy $x = 6$.
A fiúk száma = $2x = 12$.
Osztály létszáma = $18 + 12 = 30$.
- b) Béla osztályában a fiúk és a lányok számának aránya 4: 5. Ha a fiúk száma 2-vel több lenne, és a lányok száma 3-mal kevesebb, akkor a fiúk és a lányok számának aránya 7: 6 lenne. Hány fiú és hány lány jár Béla osztályába?
Fiúk száma = $4x$
Lányok száma = $5x$
Ha a fiúk száma = $4x + 2$ és a lányok száma = $5x - 3$,
akkor $\frac{4x+2}{5x-3} = \frac{7}{6} \Rightarrow 6(4x + 2) = 7(5x - 3) \Rightarrow 24x + 12 = 35x - 21 \Rightarrow x = 3$
Tehát a fiúk száma $4x = 12$, a lányok száma $5x = 15$

4. Tamás a természetes számokból olyan számsorozatokat készít, amelyekben az első szám (első tag) 0, és az utolsó szám (utolsó tag) 72, és minden sorozatra külön-külön igaz, hogy bármely tagnak és az őt közvetlenül megelőző tagnak a különbsége állandó, természetes szám.
- a) A Tamás által előállítható sorozatok közül adjunk meg egy olyan sorozatot, amely összesen 13 tagból áll!
 - b) Tamás összesen hány ilyen sorozatot tud készíteni, ha minden sorozatnak van legalább 3 tagja?

Megoldás (5 pont + 7 pont = 12 pont):

- a) A Tamás által előállítható sorozatok közül adjunk meg egy olyan sorozatot, amely összesen 13 tagból áll!
- Mivel bármely tagnak és az őt közvetlenül megelőző tagnak a különbsége állandó, ezért a sorozat tagjai mindig ugyanannyival növekednek.
- A sorozatban az első tag után még 12 tag következik, így áll a sorozat 13 tagból.
- Legyen a növekedés értéke x , ekkor $12x = 72$, amiből következik, hogy $x = 6$
- Tehát a sorozat tagjai: 0; 6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; 54; 60; 66; 72
- b) Tamás összesen hány ilyen sorozatot tud készíteni, ha minden sorozatnak van legalább 3 tagja?
- Már az előző pontban is említettük, hogy a sorozat tagjai mindig ugyanannyival növekednek.
- Legyen x a növekedés értéke!
- Ha azt akarjuk, hogy ez az x szám természetes szám legyen, akkor 72 osztható kell legyen x szel.
- Így az x értékei 72-nek az osztóiból kerülnek ki, ezek az osztók: 1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36; 72
- De mivel minden sorozat legalább három tagból kell álljon, ezért növekedés értéke, azaz az x értéke nem lehet 72, mert akkor a sorozat csak két tagból (0; 72) állna.
- Így Tamás összesen 11 különféle sorozatot állíthat elő, olyanokat, amelyekben a tagok közötti különbség rendre: 1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36

5. Az $ABCD$ rombusz egyik szöge 60° -os, kerülete 40 cm .

- Számítsd ki a rombusz oldalait!
- Számítsd ki a rombusz átlóit!
- Számítsd ki a rombusz területét!
- Hány % -a a rombusz minden oldalát belülről érintő kör területe a rombusz területének?

Megoldás (2 pont + 6 pont + 2 pont + 4 pont = 14 pont):

- a) Számítsd ki a rombusz oldalait!

Jelöljük a rombusz oldalát a -val!

Mivel a rombusz minden oldala ugyanakkora, így $4a = 40$.

Tehát 10 cm hosszúak az oldalak.

- b) Számítsd ki a rombusz átlóit!

Mivel az ABD háromszög egyenlőszárú, így a B és D csúcsoknál lévő szögek egyenlőek. Mivel a szárak által bezárt szög 60° -os, így a másik két szög is 60° -os lesz, hiszen a háromszög belső szögeinek összege 180° .

Az előbbiekből következik, hogy az ABD háromszög egyenlő oldalú (szabályos) háromszög.

Tehát $BD = a = 10\text{ cm}$.

Mivel a rombusz átlói felezik egymást és merőlegesek egymásra, így alkalmazható a Pitagorasz tétel, amelynek alapján:

$$\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow \frac{AC^2}{4} + 5^2 = 10^2 \Rightarrow AC = 10 \cdot \sqrt{3} \approx 17,32\text{ cm}$$

Tehát a rombusz átlói: $BD = 10\text{ cm}$, és $AC = 10 \cdot \sqrt{3} \approx 17,32\text{ cm}$

- c) Számítsd ki a rombusz területét!

$$T_{\text{rombusz}} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{10 \cdot 10 \cdot \sqrt{3}}{2} = 50 \cdot \sqrt{3} \approx 86,60\text{ cm}^2$$

- d) Hány % -a a rombusz minden oldalát belülről érintő kör területe a rombusz területének?

Az átlók a rombusz területét négy egyenlő részre osztják, ezért:

$$T_{AOD\Delta} = \frac{50\sqrt{3}}{4} \approx 21,65\text{ cm}^2$$

Ugyanakkor az AOD háromszög területe úgy is kiszámolható, hogy:

$$T_{AOD\Delta} = \frac{AD \cdot m}{2} = \frac{10 \cdot m}{2} = 5 \cdot m,$$

ahol m megegyezik a rombuszba írt kör sugarával ($m = r$).

Egy háromszög területe nem függ a kiszámolási módtól, ezért:

$$\frac{50\sqrt{3}}{4} = 5r \Rightarrow r = \frac{5\sqrt{3}}{2} \approx 4,33\text{ cm}$$

A beírt kör területe: $T_{\text{kör}} = 4,33^2 \cdot \pi \approx 58,90\text{ cm}^2$

Már csak az a kérdés, hogy az $58,90$ hány százaléka a $86,60$ -nak?

$$\frac{58,90}{86,60} \cdot 100 \approx 68\%-a$$

Tehát a rombuszba írt kör területe közelítőleg 68% -a a rombusz területének.

