

XVII. Békés Vármegyei Középiskolai Matematikaverseny

2025/2026

V. kategória

Megoldások

1. Az ABC háromszög A csúcsánál lévő külső szöge 132° . Ugyanennek a háromszögnek a B csúcsánál lévő belső szöge kétszer akkora, mint a C csúcsánál lévő belső szöge.

- a) Mekkora az A csúcsnál lévő belső szög?
b) Mekkora a további belső szögek?



Megoldás (2 pont+4 pont = 6 pont):

- a) Mekkora az A csúcsnál lévő belső szög?

A külső szög értelmezéséből következik, hogy az A csúcsnál lévő belső szög:

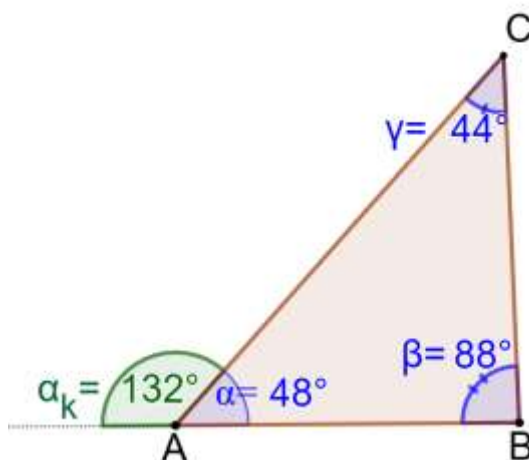
$$\alpha = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$$

- b) Mekkora a további belső szögek?

Mivel a háromszög belső szögeinek összege $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, ezért a másik két belső szög összege:

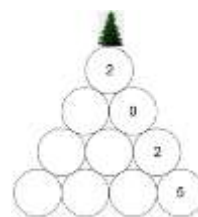
$$\beta + \gamma = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ$$

Ezen két belső szög $\beta : \gamma = 2 : 1$ arányából az következik, hogy $\beta = 2\gamma$, így a $3\gamma = 132^\circ$ -ot harmadolni kell ($\frac{132^\circ}{4} = 44^\circ$), így a B csúcsnál lévő belső szög $\beta = 2 \cdot 44^\circ = 88^\circ$, a C csúcsnál lévő belső szög pedig $\gamma = 1 \cdot 44^\circ = 44^\circ$.



2. Évszamos feladatok jönnek:

- a) Az ábra egy tavalyi karácsonyfát szimbolizál kör alakú díszekként, csúcsdíszszel, a jobb oldalán 2025-ös évszám. Töltsd ki egész számokkal a díszeket (köröket) a következő szabály szerint: alulról a második sortól kezdve minden körben a közvetlenül alatta lévő bal oldali számból vond ki a jobb oldali számot! (Nem kell indokolnod.)

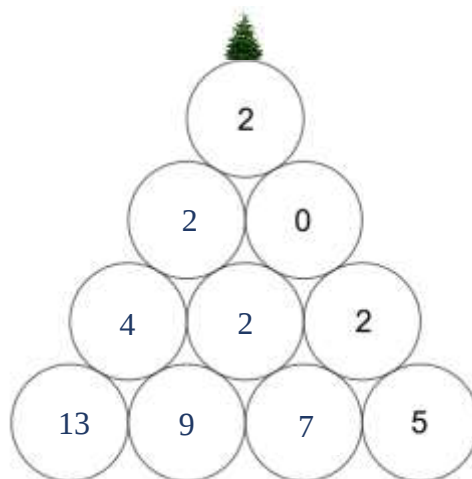
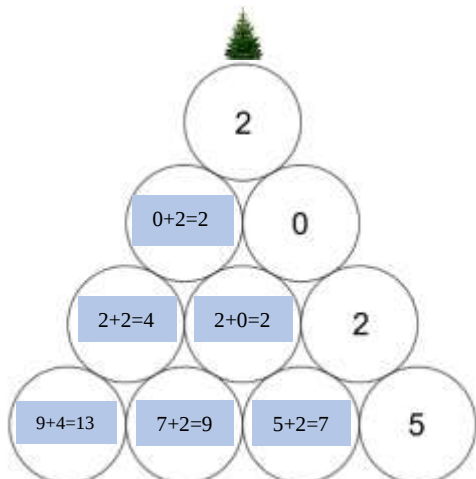


- b) Gondoltam egy számra, amiből elvettem 1000-et, a kapott különbséget megszoroztam 2-vel, így a gondolt számnál 26-tal nagyobb számot kaptam eredményül. Melyik számra gondoltam?

Megoldás (2 pont + 6 pont = 8 pont):

- a) Az ábra egy tavalyi karácsonyfát szimbolizál kör alakú díszekként, csúcsdíszszel, a jobb oldalán 2025-ös évszám. Töltsd ki egész számokkal a díszeket (köröket) a következő szabály szerint: alulról a második sortól kezdve minden körben a közvetlenül alatta lévő bal oldali számból vond ki a jobb oldali számot! (Nem kell indokolnod.)

Visszafelé gondolkodva a szabály: **a jobb oldali és a jobb felső összege.**



- b) Gondoltam egy számra, amiből elvettem 1000-et, a kapott különbséget megszoroztam 2-vel, így a gondolt számnál 26-tal nagyobb számot kaptam eredményül. Melyik számra gondoltam?

Jelöljük a gondolt számot x -szel! Ha elveszünk belőle 1000-et, $x - 1000$ -et kapunk. Az eredmény 2-szerese $2(x - 1000)$ lesz. a gondolt számnál 26-tal nagyobb szám $x + 26$. Foglalkozunk egyenletbe:

$$\begin{aligned} 2(x - 1000) &= x + 26 \\ 2x - 2000 &= x + 26 \\ x &= 2026 \end{aligned}$$

Tehát a 2026-ra gondoltam.

Ellenőrzés:

$$\begin{aligned} 2(2026 - 1000) &= 2026 + 26 \\ 2 \cdot 1026 &= 2052 \\ 2052 &= 2052 \end{aligned}$$

Ez pedig igaz, így helyes volt a válaszuk.

3. Egy online játék szerencsedobozába beletesszük azokat a háromjegyű számokat, amelyek számjegyei 6-nál kisebbek, de 1-nél nagyobbak. Azt is tudjuk, hogy a dobozban lévő háromjegyű számok oszthatók 5-tel, valamint azt is, hogy minden szám különböző számjegyekből áll (nincs bennük ismétlődés).

a) Hány háromjegyű szám van a dobozban? Ha tudod, sorold fel őket!

b) Ha látatlanban kiveszünk közülük egyet, mi az esélye annak, hogy a szám 400-nál nagyobb?

Megoldás (5 pont + 5 pont = 10 pont):

a) Hány háromjegyű szám van a dobozban? Ha tudod, sorold fel őket!

A 6-nál kisebb, de 1-nél nagyobb számjegyek: 2; 3; 4; 5

Ezekből a számjegyekből kell háromjegyű számokat képezni úgy, hogy a számjegyek ne ismétlődjenek.

Mivel a szám osztható 5-tel, ezért a számnak 5-re kell végződnie, így az egyesek helyén biztosan az 5-ös áll.

Így a tízesek és a százask helyére már csak 3 számjegy (az 5-ös már fix) közül választhatunk ismétlés nélkül.

A tízesek helyére 3 lehetőségünk van, a százask helyére már csak 2 lehetőség (nincs ismétlődés). Mivel minden tízesek helyén álló számjegyhez (3 db) 2 db százask helyén álló számjegyet választhatunk, így ezen a két helyen $3 \cdot 2 = 6$ lehetőségünk van.

Tehát 6 db, 5-tel osztható, háromjegyű szám képezhető a 2; 3; 4; 5 számjegyekből ismétlés nélkül. Ezek a számok: 235; 245; 325; 345; 425; 435

b) Ha látatlanban kiveszünk közülük egyet, mi az esélye annak, hogy a szám 400-nál nagyobb?

Az összes esetek száma az előbbi számolás alapján: 6

A 400-nál nagyobb számok ezek közül a 425 és a 435, így kedvező esetek száma: 2

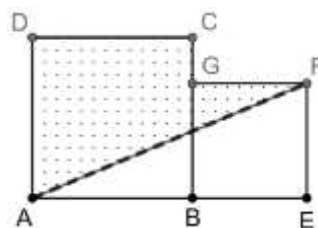
A klasszikus valószínűségi modell alapján:

$$P(> 400) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,33 \approx 33 \%$$

Tehát $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,33 \approx 33 \%$ valószínűséggel veszünk ki a dobozból 400-nál nagyobb számot.

4. A 49 m^2 területű $ABCD$ négyzet mellé illesztettük a 20 m kerületű $BEFG$ négyzetet az ábra szerint. Ezután meghúztuk az AF (szaggatott) szakaszt.

- Mekkora a négyzetek oldalai?
- Milyen hosszú az AF szakasz?
- Számold ki az $AFGCD$ (pontosított) ötszög területét!



Megoldás (2 pont + 5 pont + 5 pont = 12 pont):

- Mekkora a négyzetek oldalai?

Felhasználjuk az a oldalú négyzet esetében, hogy: $T_{\text{négyzet}} = a^2$ és $K_{\text{négyzet}} = 4a$

Mivel az $ABCD$ négyzet területe 49 m^2 , ezért annak minden oldala pl. $AB = \sqrt{49} = 7 \text{ m}$.

Mivel az $BEFG$ négyzet kerülete 20 m , ezért annak minden oldala pl. $BE = \frac{20}{4} = 5 \text{ m}$.

- Milyen hosszú az AF szakasz?

Mivel a négyzet minden szöge derékszög, így a konstrukcióból is következik, hogy az AEF (sárga) háromszög derékszögű háromszög, a derékszög az E csúcsnál van.

Ennek a derékszögű háromszögnek az egyik befogója:

$$AE = AB + BE = 7 + 5 = 12 \text{ m}$$

A másik befogója: $EF = BE = 5 \text{ m}$

A keresett AF szakasz hosszának kiszámításához alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt:

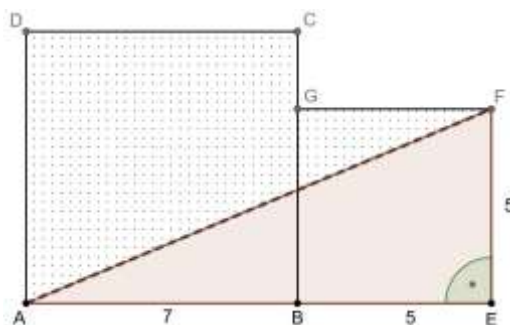
$$AF^2 = AE^2 + EF^2$$

$$AF^2 = 12^2 + 5^2$$

$$AF^2 = 144 + 25$$

$$AF^2 = 169$$

$$\underline{AF = 13}$$



Tehát a keresett szakasz hossza: $AF = 13 \text{ m}$

- Számold ki az $AFGCD$ (pontosított) ötszög területét!

A kérdéses ötszög területének közvetlen kiszámítása az összetettsége miatt nehézkes.

Észrevehetjük, hogy az ötszög területét megkaphatjuk úgy is, hogy a két négyzet alkotta síkidom területéből kivonjuk az AEF derékszögű háromszög területét:

$$T_{AFGCD} = T_{ABCD+BEFG} - T_{AEF}$$

$$T_{AFGCD} = T_{ABCD} + T_{BEFG} - T_{AEF}$$

Szükséges adatok:

$$T_{ABCD} = 49 \text{ m}^2 ; T_{BEFG} = 5^2 = 25 \text{ m}^2 ; T_{AEF} = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30 \text{ m}^2$$

Ezeket az adatokat és a fenti összefüggést felhasználva kapjuk:

$$T_{AFGCD} = 49 + 25 - 30 = 44 \text{ m}^2$$

Tehát a keresett $AFGCD$ ötszög területe 44 m^2 .

5. Egy osztályban a tanulók internetes szokásait mérték fel. Megállapították, hogy szabadidejükben online játékokat keresnek, illetve videókat néznek leginkább. Csak online játékokat 8 tanuló keres, míg mindkettőre 12 tanuló szokott rákeresni, nézni. A videókat néző tanulók száma az online játékokat kereső tanulók számának 125 %-a.

- Hány tanuló keres rá online játékokra?
- Hány tanuló néz videókat?
- Hány fős az osztály, ha tudjuk, hogy 2 tanuló nem használ internetet?
- Készíts a létszámokat is tartalmazó halmazábrát!

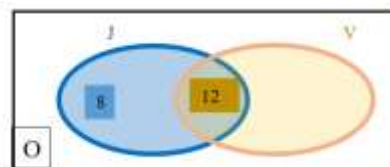


Megoldás (3 pont + 3 pont + 6 pont + 2 pont = 14 pont):

- a) Hány tanuló keres rá online játékokra?

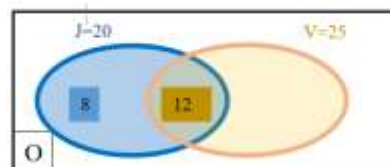
Jelöljük O -val az osztályt, J -vel az online játékokra kereső, V -vel a videókat néző tanulók halmazát! Írjuk be az első két feltételt a halmazábrába!

Az ábráról könnyen leolvasható, hogy az online játékokra rákeresők száma: $8 + 12 = 20$



- b) Hány tanuló néz videókat?

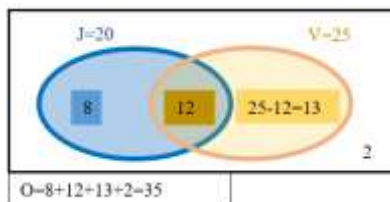
A videókat nézők száma az online játékokra keresők számának 125 %-a, vagyis $20 \cdot 1,25 = 25$ fő.



- c) Hány fős az osztály, ha tudjuk, hogy 2 tanuló nem használ internetet?

Ehhez ki kell számolnunk a csak videókat nézők számát:
 $25 - 12 = 13$

Be kell írni még a halmazábrába az internetet nem használók számát is: 2 tanuló



A halmazábrában szereplő részhalmazok különállóak (diszjunktak), így azokat össze lehet adni:

$$|O| = 8 + 12 + 13 + 2 = 35$$

Tehát osztály tanulóinak száma, az osztály létszáma 35 fő.

- d) A halmazábra folyamatosan bővült, fentebb látható(k).