A 2023. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

2023. október 27.- 2023. november 6.

1. feladat. *Igazoljuk, hogy ha X egy végtelen, κ számosságú halmaz, akkor van X részhalmazainak olyan $\mathcal{F}$ rendszere, hogy*

(i) X minden κ számosságú A részhalmazához van olyan $F \in \mathcal{F}$, amelyre $A \cap F$ számossága κ, és

(ii) X nem áll elő κ-nál kevesebb $\mathcal{F}$-beli, és egy κ-nál kisebb számosságú halmaz uniójaként.

2. feladat. *Legyenek $G_0, G_1, \ldots$ egy Hausdorff-tér végtelen nyílt részhalmazai. Bizonyítandó, hogy vannak olyan $V_0, V_1, \ldots$ páronként diszjunkt végtelen nyílt halmazok és $n_0 < n_1 < \cdots$ indexek, amelyekre $V_j \subseteq G_{n_j}$ teljesül minden $j = 0,1, \ldots$ esetén.*

3. feladat. *Legyen $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ egy véges metrikus tér alaphalmaza, ahol a pontokat induktíven úgy soroljuk fel, hogy minden $1 \leq k \leq n$-re x_k maximalizálja az $\{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ pontoktól vett távolságok szorzatát. Igazoljuk, hogy ha egy $x \in X$-re Π_x az x pontnak a tér többi pontjától vett távolságainak szorzata, akkor $\Pi_{x_n} \leq 2^{n-1}\Pi_x$ minden x-re.*

4. feladat. *Határozzuk meg azokat az $X, Y \subset \mathbb{R}$ halmazpárokat, amelyekre igaz a következő: ha $f(x, y)$ olyan függvény az $X \times Y$ halmazon, amely minden $x \in X$-re az y egy polinomjával egyezik meg Y-on, és minden $y \in Y$-ra az x egy polinomjával egyezik meg X-en, akkor f kétváltozós polinom az $X \times Y$ halmazon.*

5. feladat. *Legyen G egy tetszőleges véges csoport, és jelölje $t_n(G)$ az*

$$f\colon G^n \to G, \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 x_1 a_1 \cdots x_n a_n \qquad (a_0, \ldots, a_n \in G)$$

alakú függvények számát. Határozzuk meg $\sqrt[n]{t_n(G)}$ határértékét, ha $n \to \infty$.

6. feladat. *Igazoljuk, hogy minden elég nagy n természetes szám és $0 < k \leq$ $\leq n$ esetén van olyan m természetes szám, hogy m-nek pontosan k osztója van az $\{1,2, \ldots., n\}$ halmazból.*

7. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan $D, K \subseteq \mathbb{N}^2$ halmazok, hogy tetszőleges 4 elemű A_1 és A_2 halmazok esetén $|A_1 \cap A_2| = 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha léteznek olyan 4 elemű A_3, $A_4, \ldots$ halmazok, amelyekre $A_i \cap A_j = \emptyset$ minden $(i, j) \in D$-re, és $|A_i \cap A_j| = 2$ minden $(i, j) \in K$-ra.*

8. feladat. *Legyen q egy tetszőleges nem azonosan 0 komplex együtthatós polinom, és $\Gamma_q = \{z : |q(z)| = 1\}$ a szintvonala. Igazoljuk, hogy minden $z_0 \in \Gamma_q$ pontra van olyan p polinom, amelyre $|p(z_0)| = 1$, de minden z_0-tól különböző $z \in \Gamma_q$-ra $|p(z)| < 1$ teljesül.*

9. feladat. *Legyen $C[-1,1]$ a $[-1,1]$ intervallumon folytonos valós függvények tere a szokásos szuprémum normával, és legyen V egy zárt, véges kodimenziós altere $C[-1,1]$-nek. Igazolandó, hogy valamely legfeljebb 1 normájú $p \in V$ polinomra $p'(0) > 2023$.*

10. feladat. *Legyen $n \geq 2$ adott természetes szám. Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan c valós szám, amelyre*

$$\exp\left(\frac{T+S}{2}\right) \leq c\frac{\exp(T)+\exp(S)}{2}$$

teljesül minden T, S önadjungált $n \times n$-es komplex mátrixra.

(Ha A, B önadjungált $n \times n$-es komplex mátrixok, akkor $A \leq B$ azt jelenti, hogy a $B - A$ mátrix pozitív szemidefinit.)

11. feladat. *Legyen K egy egységnyi területű szabályos háromszög, és válasszunk n független véletlen pontot egyenletesen K-ból. Jelölje K_n a K összes olyan eltoltjának metszetét, amely tartalmazza a választott pontokat. Mennyi K_n területének a várható értéke?*

A megoldások beküldési határideje 2023. november 6-án (hétfőn) magyar idő szerint 12.00 óra.

A feladatokat a versenyzőknek önállóan kell megoldaniuk. Több versenyző együttműködése nincs megengedve. Az internet használata csak passzív módon engedélyezett, azaz keresni szabad, de bármilyen fórumon bármilyen kérdést feltenni tilos. Ha a versenybizottság tudomására jut, hogy valamelyik versenyző ezt a követelményt megszegte, az illetőt a versenyből kizárja.

A megoldásokat elektronikusan pdf formátumban, feladatonként külön fájlban a vigvik@math.u-szeged.hu címre kérjük beküldeni. A megoldások készülhetnek szövegszerkesztővel, vagy jól olvashatóan, kézzel írva, jó minőségben szkennelve. Minden megoldáson kérjük feltüntetni a versenyző nevét, e-mail címét és a feladat sorszámát. Továbbá a megoldásokat tartalmazó e-mailben kérjük megadni a versenyző nevét, iskoláját és évfolyamát, vagy végzettségét. Más úton, illetve határidő után beadott megoldásokat a versenybizottság nem vesz figyelembe. A versenyzők egyéb felmerülő technikai kérdéseiket is a fenti e-mail címre küldhetik.