

Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematikai Emlékverseny LIII. esztendő
2014-2015. tanév

10. évfolyam

II. forduló

1. Jelölje $s(n)$ az n pozitív egész szám tízes számrendszerbeli alakjában a számjegyek összegét. Mely n -re lesz $\frac{n}{s(n)}$ a lehető legkisebb, ha $100 \leq n \leq 999$?

2. Az ABC háromszögben $BC < AC$, az AB oldal felezőpontja F , a C -ből induló magasság talppontja T . Mekkora a TCF szög, ha $ACF\angle = TCB\angle = 17^\circ$?

3. Egy körvonalon adott az A és a B pont úgy, hogy az AB szakasz nem illeszkedik a kör középpontjára. A kisebbik AB ív felezőpontja C . A körhöz az A , B , C pontokba húzott érintők páronként vett metszéspontjai D , E , F . Bizonyítsuk be, hogy a DEF háromszög területe nagyobb az ABC háromszög területének felénél.

4. Mutassuk meg, hogy ha $0 < c \leq b \leq a$, akkor

$$2a + 3b + 5c - \frac{8}{3} \cdot (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + 4 \cdot \frac{c^2}{a} \right).$$

5. Az n pozitív egész szám *modern*, ha előáll $38x^2 + 53y^2$ alakban, ahol x és y egész számok. Igazoljuk, hogy ha n *modern*, akkor $2015 \cdot n$ is *modern*.

6. Az első n darab pozitív egész számot felírjuk $2n$ darab korongra úgy, hogy minden számot pontosan két korongra írunk, és mindegyik korongra egy szám kerül. A $2n$ darab korongot úgy szeretnénk sorba rakni, hogy azon két korong között, amelyekre a k szám van írva ($1 \leq k \leq n$) pontosan k darab korong legyen.

Létezik-e ilyen sorba rendezés, ha a) $n = 6$; b) $n = 7$? (A választ indokolni kell.)