

Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LIV. esztendő

2015-2016. tanév

12. évfolyam

I. forduló

1. Számítsuk ki az

$$\frac{1}{1 + \log_{a^2b} \left(\frac{c}{a} \right)} + \frac{1}{1 + \log_{b^2c} \left(\frac{a}{b} \right)} + \frac{1}{1 + \log_{c^2a} \left(\frac{b}{c} \right)}$$

kifejezés értékét, ha tudjuk, hogy a, b, c 1-nél nagyobb valós számok.

2. Az ABC háromszögben $AB > BC$. A háromszög körülírt körét A -ban érintő egyenes a BC egyenest P -ben metszi. D az A pont P -re vonatkozó tükörképe, E pedig a C pont AP egyenesre vonatkozó tükörképe. Bizonyítsuk be, hogy az $ABDE$ négyszög húrnégyszög.

3. A pozitív tagokból álló $\{a_n\}$ sorozatra teljesül, hogy bármely pozitív egész n esetén

$$\frac{a_n + 2}{2} = \sqrt{2S_n},$$

ahol S_n a sorozat első n elemének összege. Igazoljuk, hogy $\{a_n\}$ számtani sorozat, és határozzuk meg első elemét és differenciáját.

4. Egy háromszög oldalhosszai a, b, c , megfelelő belső szögeinek nagysága α, β, γ , félkerülete pedig s . Bizonyítsuk be, hogy

$$s^2 = b^2 \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2} + c^2 \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2} + 2bc \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

5. Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényre bármely valós x esetén teljesül az alábbi egyenlet:

$$f(x^2 + x) + 2f(x^2 - 3x + 2) = 9x^2 - 15x.$$

Számítsuk ki $f(2016)$ értékét.

6. Adott egy körvonalon 15 pont. Hány olyan önmagát nem metsző törött vonal van, amelyik tartalmazza mindegyik adott pontot?