

Szókefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LV. esztendő

2016-2017. tanév

12. évfolyam

Döntő

1. Adott a valós számok lehető legbővebb részhalmazán értelmezett

$$f(x) = \frac{6 \sin^4 x - 7 \sin^2 x + 2}{\cos 2x}$$

függvény. Határozzuk meg f értelmezési tartományát és értékkészletét.

2. Az ABC háromszögben $AB = 4$, $BC = 7$, $CA = 10$ és D az AC oldal olyan pontja, amelyre $BD = 4$. Számítsuk ki az $AD : DC$ arányt.

3. Határozzuk meg a p és q egész számok értékét, ha tudjuk, hogy az

$$x^2 - \frac{p^2 + 11}{9} \cdot x + \frac{15}{4} \cdot (p + q) + 16 = 0$$

egyenlet gyökei p és q .

4. Az a , b , c pozitív valós számokra teljesül, hogy $abc = 8$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a-2}{a+1} + \frac{b-2}{b+1} + \frac{c-2}{c+1} \leq 0.$$

5. Az $\{a_n\}$ számtani sorozat tagjai pozitív valós számok. A sorozatnak van két olyan tagja, amelyek ugyanazon 1-nél nagyobb pozitív egész szám (különböző) pozitív egész kitevőjű hatványai. Bizonyítsuk be, hogy az $\{a_n\}$ tagjai közül kiválasztható egy (végtelen) mértani sorozat.

6. Az $A_1 A_2 \dots A_n$ n oldalú szabályos sokszög mindegyik oldalát és átlóját pirosra vagy kékre festjük úgy, hogy ne jöjjön létre egyszínű háromszög. Jelölje k_i az A_i pontból induló kék szakaszok számát ($i = 1, 2, \dots, n$). Igazoljuk, hogy

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n \leq \frac{n^2}{2}.$$