

Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LVII. esztendő

2018-2019. tanév

12. évfolyam

I. forduló

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet.

$$4 \cdot 3^x + \sqrt{4 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^{3x} + 3^{4x}} = 2$$

2. Határozzuk meg az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2 \sin^2 x - 3\sqrt{3} \sin x - \cos^2 x + 10$ függvény minimumát és maximumát. Hol veszi fel f a szélsőértékeit?

3. Egy nem szabályos háromszög súlypontjára és beírt körének középpontjára illeszkedő egyenes párhuzamos a háromszög egyik oldalával. Bizonyítsuk be, hogy az oldalhosszak egy számtani sorozat egymást követő tagjai.

4. Az A halmaz elemei azok a hétjegyű számok, amelyekben az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyek mindegyike pontosan egyszer fordul elő. Igazoljuk, hogy A bármely két különböző eleme közül egyik sem osztója a másiknak.

5. A sík minden egyes $P(x; y)$ pontjához rendeljük hozzá a $P'(x+y; x-y)$ pontot. Mutassuk meg, hogy tetszőleges téglalap képe olyan téglalap, amelynek területe az eredeti téglalap területének kétszerese.

6. Egy négyzetet kilenc egyenes mindegyike két olyan négyszögre bont, amelyek közül az egyik területe a másik háromszorosa. Bizonyítsuk be, hogy van olyan pont, amelyre a kilenc egyenes közül legalább három illeszkedik.