Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny L. esztendő

2011-2012. tanév

10. évfolyam

I. forduló

1. Adott az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=|x-a|+|x-b|+|x-c|$ függvény, ahol *a*, *b*, *c* valós paraméterek és $a<b<c$. Határozzuk meg az *f* függvény minimumát és minimumhelyét.

2. A derékszögű *ABC* háromszögben *C* a derékszögű csúcs. *E* a *BC* oldal pontja úgy, hogy $AC=BE$, *D* pedig az *AB* átfogónak az a pontja, amelyre teljesül, hogy a *DE* és *BC* egyenesek merőlegesek egymásra. Tudjuk, hogy $DE+BC=1$ és $BD=\frac{1}{2}$. Számítsuk ki az *ABC* háromszög szögeit.

3. Egy vonat, amely Szegedről Budapestre ment, Ceglédtől pályaépítési munkák miatt *n*-ed részére csökkentette a sebességét, így *a* órát késett. Ha Budapesthez *b* kilométerrel közelebb csökkentette volna *n*-ed részére a sebességét, akkor késése *c* óra lett volna ($a>0$, $b>0$, $c>0$, *n* pozitív egész). Fejezzük ki *a*, *b*, *c* és *n* segítségével a vonat eredeti, km/h-ban mért sebességét.

4. Az *ABC* háromszög *S* súlypontjára teljesül, hogy $SA=2\sqrt{3}$, $SB=2\sqrt{2}$, $SC=2$. Számítsuk ki az *ABC* háromszög területét.

5. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan pozitív egész *n* szám van, amelyre *n* osztója (2^n+1)-nek.

6. Egy könyvesboltban 10 vásárló összesen 30 darab könyvet vásárolt úgy, hogy mindenki pontosan 3 darab, páronként különböző könyvet vett. Miután mindannyian fizettek és távoztak, az eladó észrevette, hogy bármely két vásárlóhoz van legalább egy olyan könyv, amelynek mindketten megvették egy-egy példányát. A 10 vásárló által legnagyobb példányszámban vásárolt könyvből összesen *k* darab fogyott. Határozzuk meg *k* minimális értékét.