HAJNAL IMRE
MATEMATIKA TESZTVERSENY

Feladatsor

II. kategória

Békés Megyei Tagozata
Békés Megyei Harruckern János
Középiskola
MTA SZAB Békés Megyei Testületének
Matematika Tudományos Műhelye
2015. március 21.
Gyula

1. Ha $(4-x)^3 = \left(\frac{8}{27}\right)^{-1}$, akkor $x =$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{5}{2}$ (E) $\frac{2}{5}$

2. Növekvő sorozatba írjuk azokat a pozitív egész számokat, amelyek oszthatók 2-vel vagy 5-tel. Melyik szám áll a 2015-ödik helyen?

(A) 3358 (B) 3350 (C) 4030 (D) 5045 (E) 5636

3. Egy téglatest egy csúcsba futó élei cm-ben mérve 1-nél nagyobb, páronként különböző pozitív egész számok. Ha a téglatest térfogata 2015 cm^3, akkor felszíne cm^2-ben mérve

(A) 623 (B) 806 (C) 880 (D) 588 (E) 1246

4. A 11, 12, 17, 18, 23, 29, 30 számok közül eltávolítunk egyet. Az így kapott hat szám átlaga 1,5-del lesz kisebb, mint az eredeti hét szám átlaga. Melyik számot távolítottuk el?

(A) 17 (B) 18 (C) 23 (D) 29 (E) 30

5. Egy derékszögű háromszöget az egyik hegyesszögű csúcsából induló két szakasszal három egyenlő szárú háromszögre lehet szétvágni. Mekkora a háromszög legkisebb szöge?

(A) 10° (B) 11,25° (C) 15° (D) 22,5° (E) 30°

6. Egy ötjegyű számból kivonjuk a számjegyei összegét. A kivonás után kapott ötjegyű szám számjegyeit balról jobbra csökkenő sorrendben írva egy újabb ötjegyű számot kapunk. Ennek egyik számjegyét elhagyva a 9542 számot kapjuk. Melyik számjegyet hagytuk el?

(A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 7 (E) 8

7. A pozitív körüljárású $ABCD$ négyzet AB oldalának felezőpontja M, BC oldalának felezőpontja N, a DM szakasz felezőpontja O, a DN és CM szakaszok metszéspontja pedig P. Ha $MC = 2$ cm, akkor $OP =$

(A) 1 cm (B) $\sqrt{2}$ cm (C) 1,5 cm (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm (E) 1,6 cm

8. Az egyik városból elindult egy zónázó vonat, és 80 km/h átlagsebességgel haladt. Egy idő múlva ugyanabból a városból ugyanabba az irányba elindult egy IC 120 km/h átlagsebességgel. Az IC indulása után 1 órával ugyanakkora távolságra voltak egymástól, mint az IC indulása után 3 órával. Hány óra telt el a két vonat indulása között?

(A) 0,5 (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) 1,5 (E) 2

9. Egy háromszög oldalhosszai az $(x-5)(x^2-11x+30)=0$ egyenlet gyökei. Mekkora a háromszög területe?

(A) 6 (B) 12 (C) $15\sqrt{2}$ (D) 24 (E) $\frac{25\sqrt{3}}{4}$

10. Ha 121 az a alapú számrendszerben ötjegyű, öt darab 1-es számjegyből álló szám, akkor $a =$

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

11. Ha $4^a = 5$, $5^b = 6$, $6^c = 7$ és $7^d = 8$, akkor $a \cdot b \cdot c \cdot d =$

(A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{5}{2}$ (E) 3

12. Az ABC háromszög A csúcsánál levő belső szöge 20°-os. A B és C csúcsokból induló belső szögfelezők O-ban, az ugyanezen csúcsokból induló külső szögfelezők pedig K-ban metszik egymást. Mekkora a $BKCO$ négyszög K csúcsánál fekvő belső szög?

(A) 60° (B) 75° (C) 80° (D) 85° (E) 90°

13. Marci táskájában is, Dani táskájában is van egy piros, egy sárga, egy kék, egy fehér és egy lila golyó. A tíz golyó egyforma méretű, tapintásra nem különböztethető meg egymástól. Marci véletlenszerűen kivesz egy golyót a táskájából, és Dani táskájába helyezi úgy, hogy Dani azt nem látja. Ezután Dani vesz ki véletlenszerűen egy golyót a táskájából, és azt Marci táskájába teszi. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek után mindkét táskában öt, páronként különböző színű golyó van, azaz a golyók eloszlása a kezdő helyzetnek megfelelő?

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

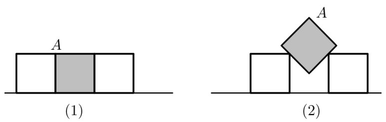
14. Az $x^2-mx+2=0$ egyenlet gyökei a és b. Ha $a+\frac{1}{b}$ és $b+\frac{1}{a}$ az $x^2-px+q=0$ egyenlet gyökei, akkor $q=$

(A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) 4 (D) $\frac{9}{2}$ (E) 8

15. Tamás most t éves, és t megegyezik három gyermeke jelenlegi életkorának összegével. N évvel ezelőtt Tamás életkora kétszer akkora volt, mint gyermekei akkori életkorának összege. Határozzuk meg a $\frac{t}{N}$ értékét.

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

16. Az ábrán látható egységnyi oldalú szürke négyzetet az (1) helyzetből a (2) helyzetbe visszük. Milyen távol van a (2) helyzetben az A pont a másik két négyzetet „tartó" egyenestől?



(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\sqrt{2}+\frac{1}{2}$ (E) 2

17. Egy elsőfokú függvény grafikonjára illeszkednek az $A(1;\,1)$ és $B(100;\,1000)$ pontok. Hány olyan pont van az AB szakasz belsejében, amelynek mindkét koordinátája egész?

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 8 (E) 9

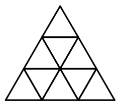
18. Ha az a, b, c valós számokra $a-7b+8c=4$ és $8a+4b-c=7$, akkor $a^2-b^2+c^2=$

(A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 7 (E) 8

19. Egy pozitív egész szám *prím-kinézetű*, ha összetett szám, de nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal sem 5-tel. Hány 1000-nél kisebb *prím-kinézetű* pozitív egész szám van, ha tudjuk, hogy az 1000-nél kisebb prímszámok száma 168?

(A) 100 (B) 102 (C) 104 (D) 106 (E) 108

20. Fogpiszkálókból egybevágó szabályos háromszögeket építünk egymás mellé úgy, hogy azok egy nagyobb szabályos háromszöget formázzanak. Az alábbi ábrán 18 darab fogpiszkálóból épített 3 soros szabályos háromszög látható, amely 9 darab egybevágó kis szabályos háromszögből áll. Ennek alsó sorában 5 kicsi egybevágó szabályos háromszög van. Hány fogpiszkáló kell egy akkora alakzathoz, amelynek alsó sorában 2015 darab egybevágó kis háromszög van?



(A) 1 016 064 (B) 1 018 081 (C) 1 522 584 (D) 1 525 608 (E) 4 060 225

21. Egy négyzet alapú egyenes gúlát (négyoldalú szabályos gúlát) kettévágunk egy olyan síkkal, amely párhuzamos az alaplappal, és az alaplaptól vett távolsága 2 egység. Az így levágott kisebb gúla felszíne fele az eredeti gúla felszínének. Mekkora az eredeti gúla magassága?

(A) 2 (B) $2+\sqrt{2}$ (C) $1+2\sqrt{2}$ (D) 4 (E) $4+2\sqrt{2}$

22. Adott az $x^2+y^2-6x=12y+124$ egyenletű kör, középpontja A. Adott továbbá két egyenes, e_1: $4x+3y=30$ és e_2: $3x-4y=10$, metszéspontjuk B. Az e_2 egyenesnek és a körnek a koordináta-rendszer III. síknegyedébe eső metszéspontja C. Mekkora az ABC háromszög területe?

(A) 30 (B) $\frac{169}{2}$ (C) 45 (D) 60 (E) 65

23. Minden 1-nél nagyobb pozitív egész n-re $a_n=\left(\log_n 2015\right)^{-1}$. Ha $b=a_2+a_3+a_4$ és $c=a_{10}+a_{12}+a_{13}+a_{31}$, akkor $b-c=$

(A) -2 (B) -1 (C) $\frac{1}{2015}$ (D) $\frac{1}{403}$ (E) $\frac{1}{5}$

24. Az $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorokra teljesülnek a következők: $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=4$ és $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Ekkor $\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}=$

(A) -13 (B) -5 (C) 11 (D) 13 (E) 19

25. Seholsincs országban a király férjhez szeretné adni a lányát. A kérőknek több próbát kell teljesíteni a szép királylány kezének elnyeréséért. Az utolsó próbán a kérő elé három pénzes erszényt raknak, amelyekben rendre 11, 7 és 6 darab pénzérme van. A kérő feladata, hogy minél kevesebb lépésben ossza el egyenlően a pénzérméket az erszényekbe úgy, hogy egyik erszényből a másikba pontosan annyit tehet át egy alkalommal, amennyi ott már van. Mennyi a minimális lépésszám?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) Az előzőek közül egyik sem.