XXVIII. Hajnal Imre Matematika Tesztverseny, 2024
II. kategória
Megoldások
(Kosztolányi József)

1. Mennyi 80-nak a 7,5%-a?

(A) 7,5 (B) $6\frac{2}{3}$ (C) 5 (D) 60 (E) 6

Megoldás: $80\cdot 0,075 = 0,8\cdot 7,5 = 6$

2. Melyik számjegy áll $\frac{3}{7}$-nek a tizedestört alakjában a tizedesvesszőtől számított 21. helyen?

(A) 8 (B) 4 (C) 5 (D) 7 (E) 2

Megoldás: A $\frac{3}{7}$ periodikus (szakaszos) tizedestört, a periódus hossza 6: $\frac{3}{7} = 0,\dot{4}2857\dot{1}$. Mivel 21-nek a 6-os maradéka 3, ezért a 21. számjegy a 8.

3. Az *ABC* háromszög szögeinek nagysága a szokásos jelölésnek megfelelően fokokban mérve α, β, γ. Ekkor a háromszög *C* csúcsnál levő külső szöge:

(A) $180-\alpha-\beta$ (B) $90+\alpha+\beta$ (C) $360-\alpha-\beta$ (D) $\alpha+\beta$ (E) $180+\alpha+\beta$

Megoldás: Ismert tétel, hogy a háromszög bármelyik külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével. Így a a helyes válasz: $\alpha+\beta$.

4. Melyik az a legmagasabb 2-hatvány, amellyel osztható az 1 millió?

(A) 2^3 (B) 2^4 (C) 2^5 (D) 2^6 (E) 2^8

Megoldás: Mivel $10^6 = 2^6\cdot 5^6$, ezért 2^6 a legmagasabb 2-hatvány, amellyel osztható az 1 millió.

5. $1-2+3-4+5-6+...+2023-2024+2025=$

(A) 2024 (B) 1013 (C) 1012 (D) -1012 (E) 1

Megoldás: Az összeg tagjai csoportosíthatók a következő módon:

$$1-2+3-4+5-6+...+2023-2024+2025=(1-2)+(3-4)+(5-6)+...+(2023-2024)+2025=$$
$$=1012\cdot(-1)+2025=1013$$

6. Az egységnyi sugarú, 120°-os középponti szögű körcikk kerületének és az egységnyi sugarú kör kerületének aránya:

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{3}+\frac{2}{\pi}$ (C) $\frac{1}{3}+\frac{1}{\pi}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{1}{2+\pi}$

Megoldás: Az egységnyi sugarú, 120°-os középponti szögű körcikk kerülete: $\frac{2\pi}{3}+2$. Mivel az egység sugarú kör kerülete 2π, ezért a keresett arány: $\frac{\frac{2\pi}{3}+2}{2\pi}=\frac{1}{3}+\frac{1}{\pi}$.

7. Egy iskolai matematikaversenyen 30 fiú és 20 lány vett részt. A fiúk 10%-a, a lányok 20%-a nyert valamilyen díjat. Az összes résztvevő tanuló hány százaléka kapott díjat?

(A) 15 (B) 30 (C) 14 (D) 16 (E) 7

Megoldás: A feltételek alapján 3 fiú és 4 lány, azaz összesen 7 tanuló kapott díjat. A 7 az 50-nek 14%-a.

8. Ha $p = q \cdot \left(r - \frac{1}{s}\right)$, akkor $s =$

(A) $\frac{p}{q} - r$ (B) $\frac{q}{qr-p}$ (C) $\frac{q}{p-qr}$ (D) $\frac{q}{r-p}$ (E) $\frac{1}{qr-p}$

Megoldás: Alakítsuk a feltételt.

$$p = qr - \frac{q}{s}$$

$$\frac{q}{s} = qr - p$$

$$s = \frac{q}{qr-p}$$

9. Ha $6^{x+y} = 36$ és $6^{x+5y} = 216$, akkor $x =$

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{5}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{7}{4}$

Megoldás: A két feltételi egyenletből adódik, hogy $x + y = 2$ és $x + 5y = 3$. Az első egyenlet ötszöröséből kivonva a második egyenletet $4x = 7$ adódik, ahonnan $x = \frac{7}{4}$.

10. Hány olyan páronként különböző számjegyekből álló négyjegyű pozitív egész szám van, amelynek egyik számjegye sem 0, és a számjegyek összege 12?

(A) 56 (B) 18 (C) 216 (D) 24 (E) 48

Megoldás: A négy számjegy között biztosan előfordul az 1 és a 2, ugyanis ellenkező esetben a számjegyösszeg nagyobb lenne 12-nél. Ezért csak két olyan számjegynégyes van, amely megfelel a feltételeknek: 1, 2, 3, 6 illetve 1, 2, 4, 5. Mindkét esetben $4! = 24$ megfelelő négyjegyű szám van, így összesen 48 ilyen szám van.

11. Egy téglalap alakú papírlapból mindegyik oldalán levágunk egy 1 cm széles sávot. Az így kapott, szintén téglalap alakú lap területe fele az eredeti lap területének. Hány cm^2 volt az eredeti papírlap területe, ha kerülete 28 cm volt?

(A) 26 (B) 40 (C) 48 (D) 45 (E) 60

Megoldás: Ha *a* és *b* jelöli az eredeti téglalap szomszédos oldalainak hosszát, akkor a feltétel szerint $2(a-2)(b-2) = ab$. Ezt alakítva kapjuk az $ab - 4(a+b) + 8 = 0$ egyenletet. A kerületre vonatkozó feltétel alapján $a + b = 14$. Így $ab - 56 + 8 = 0$, ahonnan $ab = 48$.

12. Ha $a < b < c < d < e$, akkor az alábbi egyenlőtlenségek közül melyik igaz biztosan?

(A) $a + e < b + d$ (B) $a + e < b + c + d$ (C) $b + d < a + e$

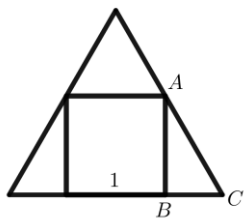
(D) $a + b + c < c + d + e$ (E) $a + c + e < b + d$

Megoldás: (A) lehet hamis, például $1<2<3<4<10$, de $1+10>2+4$. Az (A) ellenpéldájaként adott számötösre (B) is hamis. Az $1<5<6<7<8$ számötös azt illusztrálja, hogy (C) is lehet hamis. (D) mindig igaz. Az $1<2<3<4<5$ számötös esetén (E) hamis.

13. Egy szabályos háromszögbe négyzetet írtunk úgy, hogy a négyzet egyik oldala illeszkedik a háromszög egyik oldalára, másik két csúcsa pedig a háromszög másik két oldalának egy-egy belső pontja. Mekkora a szabályos háromszög oldala, ha a négyzet oldala 1?

(A) 2 (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ (E) $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$

Megoldás: Az ábra *ABC* háromszöge egy szabályos háromszög fele, ezért $BC=\frac{AC}{2}$ és $1=\frac{AC\cdot\sqrt{3}}{2}$, ahonnan $AC=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $BC=\frac{1}{\sqrt{3}}$.



A szabályos háromszög oldalának hossza az ábra és a fentiek alapján:

$$1+2\cdot BC=1+\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}=\frac{3+2\sqrt{3}}{3}.$$

14. Az ókori Római Birodalomban a szerencsejátékokhoz használtak olyan „dobókockákat”, amelyeknek 6 egybevágó négyzetlapjuk és 8 egybevágó szabályos háromszöglapjuk volt. A „kocka” kétszer akkora valószínűséggel esett négyzetlapra, mint háromszöglapra. Feldobva egy ilyen „kockát” mekkora valószínűséggel esett háromszöglapra?

(A) $\frac{4}{7}$ (B) $\frac{3}{11}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{3}{10}$ (E) $\frac{2}{5}$

Megoldás: Jelölje *p* annak a valószínűségét, hogy a „kocka” háromszöglapra esik. Ekkor a négyzetlapra esés valószínűsége 2*p*. Az „élen megállás” valószínűsége 0, ezért

$$6\cdot 2p+8\cdot p=1,$$

ahonnan $p=\frac{1}{20}$. Így a keresett valószínűség: $8\cdot\frac{1}{20}=\frac{2}{5}$.

15. Marci kerékpárral jár iskolába, de egyik napon, bár kerékpárral ment el reggel, iskola után gyalog ment haza. Így az oda-vissza út összesen másfél óráig tartott. Ha oda-vissza kerékpárral közlekedett volna, akkor összesen fél órát vett volna igénybe az oda-vissza út. Hány óra alatt ér Marci az iskolába, ha gyalog megy?

(A) $1\frac{3}{8}$ (B) $1\frac{1}{8}$ (C) $1\frac{1}{4}$ (D) 1 (E) $\frac{7}{8}$

Megoldás: Marci otthona és az iskola közötti út megtételéhez szükséges „gyalogos idő” *t*, „kerékpáros idő” *t'*. A feltételek szerint (1) $t+t'=1{,}5$ és (2) $2t'=0{,}5$. (1) kétszereséből kivonva (2)-t kapjuk, hogy $2t=2{,}5$, ahonnan $t=1{,}25$.

16. Az m és n olyan egész számok, amelyekre $4 \le m^2 + n^2 \le 17$. Hány megfelelő rendezett egész (m; n) számpár van?

(A) 48 (B) 36 (C) 15 (D) 50 (E) 52

Megoldás: A rendezett számpárok száma a következő táblázat alapján összeszámolható.

m	n	Számpárok száma
0	±2, ±3, ±4	6
±1	±2, ±3, ±4	12
±2	0, ±1, ±2, ±3	14
±3	0, ±1, ±2	10
±4	0, ±1	6
Összesen:		**48**

17. Egy 3 cm élhosszúságú kockának befestjük mindegyik lapját, majd felvágjuk 1 cm élhosszú egybevágó kis kockákra. A kapott kis kockáknak összesen hány festetlen lapja lesz?

(A) 36 (B) 24 (C) 81 (D) 72 (E) 108

Megoldás: 27 darab kis kockának összesen $27 \cdot 6 = 162$ lapja van. Ezek közül $6 \cdot 9 = 54$ lap lesz festett, ezért a festetlen lapok száma $162 - 54 = 108$.

18. Egy háromszög oldalainak hossza centiméterben mérve rendre a; $a+1$; $a+2$. Mely a értékek esetén lehetséges ez?

(A) $0 < a$ (B) $0 < a < 1$ (C) $1 < a$ (D) $0 < a < 2$ (E) $0 = a$

Megoldás: A háromszög-egyenlőtlenségnek teljesülnie kell a két rövidebb oldal összegére is, azaz $a + (a+1) > a + 2$, azaz $1 < a$.

19. Az 1, 2, 3, 4 számjegyekből képezzük az összes olyan négyjegyű számot, amelyekben mindegyik számjegy pontosan egyszer szerepel. Mennyi ezen négyjegyű számok összege?

(A) 66660 (B) 11110 (C) 9999 (D) 33330 (E) 5555

Megoldás: Az összegben minden egyes számjegy mind a négy helyiértéken 6-szor fordul elő, ugyanis a másik három számjegy összes lehetséges sorrendjének száma $3! = 6$. Így a keresett összeg: $6 \cdot (1+2+3+4) \cdot 1111 = 6 \cdot 11110 = 66660$.

20. Ha az x pozitív számra teljesül, hogy $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 7$, akkor $x^3 + \frac{1}{x^3} =$

(A) $4\sqrt{7}$ (B) $7\sqrt{7}$ (C) $5\sqrt{7}$ (D) $6\sqrt{7}$ (E) $10\sqrt{7}$

Megoldás: A feltételek alapján $x + \frac{1}{x} = \sqrt{7}$. Ezt felhasználva

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 7\sqrt{7} - 3\sqrt{7} = 4\sqrt{7}.$$

21. Egy 14 számjegyből álló azonosító kód bármely három szomszédos számjegyének összege 20. Az ábrán a kód részlete látható. Melyik számjegy áll az x-szel jelölt helyen?

			9				x				7		

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 7 (E) 9

Megoldás: A feltételből adódik, hogy a kód szerkezete *ABCABCABCABCAB* lehet csak, ahol *A*, *B*, *C* számjegyek. A megadott kódrészlet alapján $A = 9$, $C = 7$, és így $x = B = 4$.

22. Ha *x* és *y* olyan pozitív egész számok, amelyekre $x + y + xy = 54$, akkor $x + y =$

(A) 12 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 54

Megoldás: A feltétel csak úgy teljesülhet, ha *x* és *y* páros. Mivel az összegüket kell meghatározni, ezért feltehetjük, hogy $x \le y$. Mivel $8+8+8\cdot 8 > 54$, ezért három esetet kell megvizsgálnunk. Ha $x = 2$, akkor $3y = 52$. Mivel 52 nem osztható 3-mal, ezért ekkor nem kapunk megoldást. Ha $x = 4$, akkor $y = 10$. Ez a számpár megfelelő, ekkor $x + y = 14$. Ha $x = 6$, akkor $7y = 48$, ahonnan nem kapunk megoldást, ugyanis 7 nem osztója a 48-nak.

23. Egy játék során Anna, Bea és Cili egymástól nyernek el zsetonokat. A játék előtt zsetonjaik számának aránya rendre 11 : 8 : 5 volt. A játék után a zsetonok számának aránya 4 : 3 : 2 lett. Melyik állítás igaz az alábbiak közül?

(A) Anna és Bea veszített, Cili nyert.
(B) Anna és Cili nyert, Bea veszített.
(C) Anna nyert, Bea veszített, Cili zsetonjainak száma nem változott.
(D) Anna veszített, Cili nyert, Bea zsetonjainak száma nem változott.
(E) Az előző állítások egyike sem igaz.

Megoldás: A játék kezdetekor legyen Anna, Bea és Cili zsetonjainak a száma rendre 11*x*, 8*x*, 5*x*. Ekkor a zsetonok számának összege 24*x*, ami a játék során nem változik. A játék után a zsetonok száma legyen rendre 4*y*, 3*y*, 2*y*. Az összeg így 9*y*. Mivel a játék során a zsetonok számának összege nem változik, ezért $24x = 9y$, ahonnan $y = \frac{8}{3}x$. *x*-szel kifejezve a lányok játék utáni zsetonjainak számát: Anna $\frac{32}{3}x$; Bea 8*x*; Cili $\frac{16}{3}x$. Mivel $\frac{32}{3}x < 11x$ valamint $\frac{16}{3}x > 5x$, ezért Anna veszített, Bea zsetonjainak a száma nem változott, Cili pedig nyert.

24. Az $\{a_n\}$ sorozatot a következőképpen definiáljuk: $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = a_n\left(a_n + 2\right)$, ha $n \ge 1$. Melyik a sorozat legkisebb olyan tagja, amelyik nagyobb 10^9-nél?

(A) a_5 (B) a_6 (C) a_{10} (D) a_{30} (E) a_{127}

Megoldás: Azt már a rekurzió alapján is lehet látni, hogy a sorozat meglehetősen gyorsan nő. Az első néhány tag kiszámítása után megfogalmazható egy sejtés a sorozat általános tagjára nézve, ami teljes indukcióval könnyen bizonyítható (a versenyen erre nem volt szükség).

$a_1 = 1 = 2 - 1$

$a_2 = 3 = 2^2 - 1$

$a_3 = 15 = 2^4 - 1$

$a_4 = 255 = 2^8 - 1$

$a_5 = 65535 = 2^{16} - 1$

$a_n = 2^{2^{n-1}} - 1$

Mivel $2^{10} = 1024$, ezért $2^{30} > 1000^3 = 10^9$. Így $a_6 = 2^{32} - 1 > 2^{30} > 10^9$, és látható, hogy ez a legkisebb megfelelő tagja a sorozatnak.

25. Hány különböző (páronként nem egybevágó) téglatestet lehet építeni 216 darab egységkockából?

(A) 16 (B) 18 (C) 19 (D) 21 (E) 22

Megoldás: A feladat olyan *a*, *b*, *c* pozitív egészek keresése, amelyekre $abc = 216 = 2^3 \cdot 3^3$.
A következő táblázatban foglaltuk össze a megoldásokat. (Feltettük, hogy $a \le b \le c$.)

a	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	6
b	1	2	3	4	6	8	9	12	2	3	4	6	9	3	4	6	8	6	6
c	216	108	72	54	36	27	24	18	54	36	27	18	12	24	18	12	9	9	6

Összesen 19 megfelelő téglatest van.