

XXIX. Hajnal Imre Matematika Tesztverseny, 2025

II. kategória

Megoldások

(Kosztolányi József)

1. $1,236 \cdot 10^{15} - 5,23 \cdot 10^{14} =$

- A) $7,13 \cdot 10^{14}$ B) 7,13 C) 71,3 D) $-3,994$ E) $7,13 \cdot 10^{13}$

Megoldás: $1,236 \cdot 10^{15} - 5,23 \cdot 10^{14} = 12,36 \cdot 10^{14} - 5,23 \cdot 10^{14} = 7,13 \cdot 10^{14}$.

2. Hat szám átlaga 4. Egy hetedik számot hozzá véve a hat számhoz az átlag 5 lesz. Mi a hetedik szám?

- A) 6 B) 5 C) 10 D) 11 E) 12

Megoldás: A feltétel alapján a hat szám összege $6 \cdot 4 = 24$. Az új szám hozzávételével kapott hét szám összege $7 \cdot 5 = 35$ lesz. Így a hetedik szám a 11.

3. Egy háromszög két csúcsánál levő külső szög nagysága 120° , illetve 130° . Mekkora a harmadik csúcsnál levő belső szög?

- A) 10° B) 60° C) 50° D) 30° E) 70°

Megoldás: A feltétel alapján a háromszög két belső szögének nagysága 60° , illetve 50° . Így a harmadik belső szög nagysága $180^\circ - 60^\circ - 50^\circ = 70^\circ$.

4. Legyen $x = (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)$, ahol n pozitív egész szám. Az alábbiak közül mely a számra teljesül a következő állítás: „Van olyan pozitív egész n szám, hogy a nem osztója x -nek.”?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

Megoldás: Mivel három egymást követő pozitív egész szám között van páros és 3-mal osztható, ezért csak a D) válasz lehet helyes. Példa: $n = 1$, $x = 24$.

5. Egy személygépkocsi útjának első felét 40 km/h, másik felét 60 km/h átlagsebességgel tette meg. Hány percig tartott az út, ha a teljes megtett távolság 40 km volt?

- A) 24 B) 48 C) 50 D) 150 E) 300

Megoldás: Az első 20 km-t 40 km/h sebességgel a személygépkocsi fél óra, azaz 30 perc alatt, míg a második 20 km-t 60 km/h sebességgel $1/3$ óra, azaz 20 perc alatt tette meg. Az út tehát 50 percig tartott.

6. Egy hivatalnok megcímzett négy borítékot négy különböző személynek, és megírta a négy különböző levelet a borítékok címzettjeinek. Viszont a levelek borítékokba helyezésénél figyelmetlen volt, és mindegyik levelet rossz (nem a levélnek megfelelő személynek címzett) borítékba tette. Hányféleképpen tehette ezt meg?

- A) 4 B) 9 C) 12 D) 6 E) 24

Megoldás: A kérdés tulajdonképpen az, hogy négy különböző elemet, mondjuk az 1, 2, 3, 4 számokat hányféleképpen tudjuk úgy sorba rendezni, hogy egyik szám se kerüljön az eredeti helyére.

1. eset: A 2-es áll az első helyen. Ekkor a megfelelő sorrendek: 2143, 2413, 2341.

2. eset: A 3-as áll az első helyen. Erre is három lehetőség van: 3142, 3412, 3421.

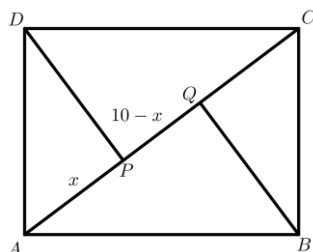
3. eset: A 4-es áll az első helyen. Ekkor a jó sorrendek: 4123, 4312, 4321.

Tehát 9-féleképpen lehetett a négy levél mindegyikét rossz címre küldeni.

7. Az $ABCD$ pozitív körüljárású téglalapban $AB = 8$, $BC = 6$. D -ből az AC átlóra állított merőleges talppontja P , B -ből az AC átlóra állított merőleges talppontja pedig Q . Milyen hosszú a PQ szakasz?

- A) 6,4 B) 6 C) 3,6 **D) 2,8** E) 1

Megoldás: Pitagorasz tételéből adódóan $AC = 10$. Legyen $AP = x$. Ekkor szimmetriaokokból a QC szakasz hossza is x , és így $PQ = 10 - 2x$.



Mivel az APD háromszög hasonló az ADC háromszöghöz, ezért $\frac{x}{6} = \frac{6}{10}$, ahonnan $x = 3,6$.

Innen $PQ = 10 - 2x = 2,8$.

8. A jó öreg falióra ma délután 1 órakor a pontos időt mutatta. Tudjuk, hogy óránként 3 percet késik. Mit fog mutatni holnap délelőtt 10 órakor?

- A) 9:03 B) 10:00 C) 11:03 **D) 8:57** E) 11:06

Megoldás: Délután 1 óra és a következő nap délelőtt 10 óra között 21 óra telik el. Ezalatt az óra összesen $21 \cdot 3 = 63$ percet késik. Így 10 óra helyett 8 óra 57 percet mutat holnap délelőtt.

9. Anna mondja: „Bea tette.”. Bea mondja: „Anna hazudik.”. Csaba mondja: „Nem én tettem.”. Dani mondja: „Anna tette.”. Ki tette, ha pontosan egy állítás hamis?

- A) Anna** B) Bea C) Csaba D) Dani E) Nem lehet eldönteni.

Megoldás: Anna és Bea állítása sem lehet egyidejűleg igaz, valamint Anna és Dani állítása sem lehet egyidejűleg igaz. Mivel pontosan egy állítás van, ezért Anna hazudik, és ő tette.

10. Egy könyv oldalainak számozásához 852 darab számjegyre volt szükség úgy, hogy a számozás az első oldalon 1-gyel kezdődik. Hány oldalas a könyv?

- A) 320** B) 247 C) 316 D) 852 E) 284

Megoldás: A legfeljebb kétjegyű sorszámu oldalak számozására elhasznált számjegyek száma $9 + 2 \cdot 90 = 189$. Ebből adódóan a háromjegyű oldalszámmal rendelkező oldalak száma $\frac{852 - 189}{3} = 221$. Így a könyv oldalainak a száma: $99 + 221 = 320$.

11. Tudjuk, hogy $x + \frac{1}{x} = 3$. Ekkor $x^2 + \frac{1}{x^2} =$

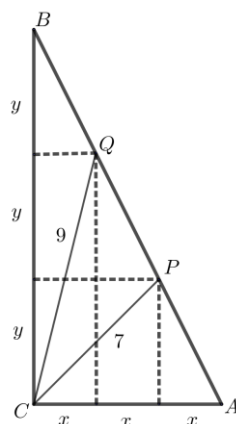
- A) 9 B) 10 C) 27 D) 11 **E) 7**

Megoldás: A feltétel alapján $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 9$, ahonnan $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$.

12. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának A -hoz közelebbi harmadolópontja P , B -hez közelebbi harmadolópontja Q . Milyen hosszú a PQ szakasz, ha $CP = 7$, $CQ = 9$?

- A) $\sqrt{15}$ B) 6 **C) $\sqrt{26}$** D) $\sqrt{32}$ E) 5

Megoldás: Húzzunk a P és a Q ponton keresztül párhuzamosokat a befogókkal. Ezek a párhuzamosok a megfelelő befogókat három egyenlő hosszúságú részre osztják, jelölje ezeket x és y az ábrán látható módon.



Ekkor Pitagorasz tétele alapján felírható a következő két egyenlet: $4x^2 + y^2 = 49$; $x^2 + 4y^2 = 81$. A két egyenlet összegéből mindkét oldal 5-tel történő osztása után adódik, hogy $x^2 + y^2 = 26$. Mivel $x^2 + y^2 = PA^2$, és $PQ = PA$, ezért $PQ = \sqrt{26}$.

13. Ha p és q olyan pozitív egész számok, amelyekre $p > q$ és $(p + q)^2 - (p - q)^2 > 29$, akkor p legkisebb értéke

- A) 7 B) 3 C) 6 **D) 4** E) 5

Megoldás: Mivel $(p + q)^2 - (p - q)^2 = 4pq > 29$, ezért $pq > \frac{29}{4} = 7\frac{1}{4}$. p kicsi pozitív egész értékeit vizsgálva, figyelembe véve, hogy $p > q$, kapjuk, hogy p legkisebb megfelelő értéke 4.

14. Hány olyan $(p; q)$ rendezett számpár van, amelyben p és q különböző prímszámok, valamint p osztója $(q^2 - q)$ -nak és q osztója $(p^2 + p)$ -nek?

- A) 0 **B) 1** C) 2 D) 3 E) végtelen sok

Megoldás: Mivel p és q prímek, ezért p sem osztható q -val, és q sem osztható p -vel. Viszont p osztója $q^2 - q = q(q - 1)$ -nek, és mivel q és $q - 1$ relatív prímek, ezért p osztója $q - 1$ -nek. Hasonló gondolatmenettel adódik, hogy q osztója $p + 1$ -nek. Ezen oszthatóságokból adódik, hogy $p \leq q - 1$, azaz $p + 1 \leq q$, valamint $q \leq p + 1$. Ez csak úgy lehetséges, ha $q = p + 1$. Mivel p és q különböző prímek, ezért $p = 2$ és $q = 3$ lehet csak. Ezekre a prímekre teljesülnek a feltételek.

15. Egy dobozban van 20 darab méretre és tapintásra egyforma golyó. Közülük 8 darab piros, 3 darab fehér és 9 darab kék. Véletlenszerűen kiveszünk 3 golyót. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kivett 3 golyó közül 2 piros, 1 fehér?

- A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{7}{285}$ D) $\frac{2}{3}$ **E) $\frac{7}{95}$**

Megoldás: Az összes kiválasztási lehetőségek száma $\binom{20}{3} = 1140$. A 8 piros golyóból 2-t

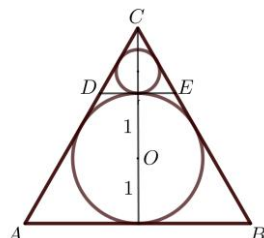
$\binom{8}{2} = 28$, a 3 fehér golyóból 1-et $\binom{3}{1} = 3$ féleképpen lehet kiválasztani. Így a keresett

$$\text{valószínűség: } P = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{28 \cdot 3}{1140} = \frac{7}{95}.$$

16. Egy szabályos háromszög beírt körének sugara 1. Mekkora annak a körnek a sugara, amely a háromszög belsejében kívülről érinti a beírt kört, és érinti a háromszög két oldalát belső pontban?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ D) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ E) $\frac{1}{5}$

Megoldás: Ha az ABC szabályos háromszög beírt körének sugara 1, akkor a magassága 3. Ebből következik (lásd az ábrát), hogy a DEC szabályos háromszög magassága 1, így beírt körének sugara $1/3$.



17. Ha $x^2 - 9x + 5 = 0$, akkor $x^4 - 18x^3 + 81x^2 + 42 =$

- A) 5 B) 25 C) 4 D) 67 E) 81

Megoldás: A negyedfokú polinom megfelelő helyettesítési értéke meghatározható úgy is, hogy a másodfokú egyenlet gyökeit behelyettesítjük a negyedfokú polinomba. Mivel a gyökök „csúnyák”, ezért ez kellemetlen számolgatás. Ehelyett másképpen okoskodunk.

A feltétel szerint $(x^2 - 9x + 5)^2 = 0$, azaz $x^4 - 18x^3 + 81x^2 - 90x + 25 = 0$. A négyzetre emeléssel kapott negyedfokú polinomot úgy alakítjuk, hogy megjelenjenek benne a feladatbeli polinomok.

$$\begin{aligned} x^4 - 18x^3 + 91x^2 - 90x + 25 &= x^4 - 18x^3 + 81x^2 + 42 + 10 \cdot (x^2 - 9x + 5) - 67 = \\ &= x^4 - 18x^3 + 81x^2 + 42 - 67 = 0 \end{aligned}$$

Az utolsó sorból azonnal látható, hogy a keresett helyettesítési érték a 67.

18. A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvényre teljesül, hogy $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ és $f(3) = 1$. Ekkor $c =$

- A) -2 B) 0 C) 3 D) 9 E) 14

Megoldás: A helyettesítési értékekre vonatkozó feltételeket felírva a következő egyenletrendszert kapjuk:

- (1) $a + b + c = 2$
(2) $4a + 2b + c = 3$
(3) $9a + 3b + c = 1$

(2)-ből (1)-et kivonva $3a + b = 1$, (3)-ból (2)-t kivonva $5a + b = -2$ adódik. Ezt a kétismeretlenes egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{11}{2}$. Visszahelyettesítés után $c = -2$ adódik.

19. Ha $(a - b)^2 + 6ab = 48$, akkor ab maximuma:

- A) 0 B) 24 C) 6 D) 8 E) nem határozható meg egyértelműen

Megoldás: A feltétel alapján $6ab = 48 - (a - b)^2 \leq 48$, azaz $ab \leq 8$. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b$.

20. Egy rombusz területe feleakkora, mint az ugyanolyan hosszú oldallal rendelkező négyzeté. Hányszorosa a rombusz hosszabbik átlójának hossza a rövidebb átló hosszának?

- A) $2 + \sqrt{3}$ B) $2 - \sqrt{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 2 E) $\sqrt{3}$

Megoldás: Ha a hosszabbik átló felének hossza a , a rövidebbik átló felének hossza b , akkor a rombusz (és a négyzet) oldalhossza Pitagorasz tétele alapján $\sqrt{a^2 + b^2}$. A területekre vonatkozó feltétel így: $\frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{(2a) \cdot (2b)}{2} = 2ab$, ahonnan $a^2 - 4ab + b^2 = 0$.

Mivel a feladat az $\frac{a}{b}$ arányra kérdez rá, ezért az utóbbi egyenletet célszerű b^2 -tel osztani.

Kapjuk: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 4 \cdot \frac{a}{b} + 1 = 0$. Ez $\frac{a}{b}$ -re egy másodfokú egyenlet, amelyet megoldva a feltételnek megfelelő 1-nél nagyobb megoldásra $\frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3}$ adódik.

21. $S = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \dots + \frac{99}{100}\right) =$
A) 2725 B) 2475 C) 2985 D) 3975 E) 4950

Megoldás: Az összegben a zárójelen belüli törtek nevezői megegyeznek, és ha ez k , akkor közös nevezőre hozás után a számlálóban 1-től $k-1$ -ig a pozitív egész számok összege található. Ez alapján

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot 3}{3} + \frac{3 \cdot 4}{4} + \dots + \frac{99 \cdot 100}{100} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{99}{2} = \frac{99 \cdot 100}{4} = 2475.$$

22. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával hány olyan ötjegyű szám képezhető, amelyben az ezresek helyén álló számjegy is, és a tízesek helyén álló számjegy is nagyobb mindkét szomszédjánál?

- A) 16 B) 12 C) 15 D) 24 E) 18

Megoldás: Az $\overline{x4x5x}$, és az $\overline{x5x4x}$ alakú számok megfelelnek a feltételnek. Mindkét típusból 6 különböző szám van, ugyanis az x -ek helyére kerülő 1, 2, 3 számjegyeknek ennyiféle különböző sorrendje lehetséges. Így ebből a kétféle számból összesen 12 darab van.

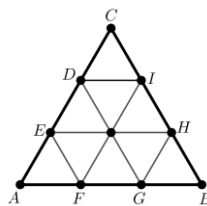
Megfelelnek a $\overline{45x3x}$ és az $\overline{x3x54}$ alakú számok is. Ebből a két típusból összesen 4 darab szám van.

Más megfelelő szám nem lehet, mert az ezresek és a tízesek helyén álló számjegyek csak a 3, 4, 5 számjegyekből kerülhetnek ki. Kaptuk, hogy összesen 16 szám képezhető a feltételnek megfelelő módon.

23. Tekintsük egy szabályos háromszög csúcsait, középpontját és oldalainak harmadoló pontjait. Hányféleképpen lehet eme tíz pont közül hármat úgy kiválasztani, hogy azok egy szabályos háromszög csúcsai legyenek?

- A) 10 B) 13 C) 12 D) 9 E) 15

Megoldás: Legyen a szabályos háromszög oldalhossza 3, és tekintsük az ábra betűzését.



A kiválasztandó szabályos háromszögek oldalhossza lehet 1, 2, illetve 3.

Az 1 oldalhosszú szabályos háromszögek az ábra alapján könnyen összeszámolhatók, belőlük 9 darab van.

A 2 oldalhosszú szabályos háromszögekből 3 darab van, az AGD , BIF , CEH háromszögek.

1 darab 3 oldalhosszú szabályos háromszög van, az eredeti ABC háromszög.

Van még 2 darab olyan szabályos háromszög, amelyek oldalhossza az eredeti háromszög

magasságának kétharmada, azaz $\frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Ezek az FHD és GIE háromszögek.

Így összesen $9 + 3 + 1 + 2 = 15$ megfelelő háromszög van.

24. Mennyi a tízes számrendszerben kétjegyű pozitív egész számok számjegyeinek összege?

A) 450

B) 900

C) 855

D) 850

E) 846

Megoldás: Az egyes helyiértéken a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek mindegyike kilencszer, a tízes helyiértéken az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek mindegyike tízszer szerepel az összegben. Így a számjegyek összege:

$$9 \cdot (0 + 1 + 2 + \dots + 9) + 10 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) = 19 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) = 19 \cdot 45 = 855.$$

25. Az egységnyi élű kocka felületéből egyik testátlójának felezőmerőleges síkja szabályos hatszöget metsz ki. Mennyi ennek a hatszögnek a területe?

A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

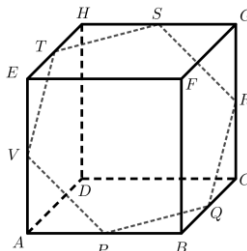
B) $\frac{3}{4}$

C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{1}{4\sqrt{3}}$

E) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

Megoldás: Használjuk az ábra jelöléseit.



A DF testátló felezőmerőleges síkja szimmetria okokból a kocka megfelelő éleit a P , Q , R , S , T , V élfelező pontokban metszi. A $PQRSTV$ szabályos hatszög oldalhossza ezért megegyezik a kocka lapátlója hosszának felével. Mivel a szabályos hatszög hat darab egybevágó szabályos háromszögre bontható, ezért a hatszög területe

$$T = 6 \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$