HAJNAL IMRE
MATEMATIKA TESZTVERSENY

Feladatsor

II. kategória

Békés Megyei Tagozata

Békés Megyei Harruckern János

Közoktatási Intézmény

MTA SZAB Békés Megyei Testületének

Matematika Tudományos Műhelye

2013. április 13.

Gyula

1. Az első 2013 darab pozitív páros szám összegéből kivonjuk az első 2013 darab pozitív páratlan szám összegét. Mennyi a különbség?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 2013 (E) 4026

2. Ha $|x-1|=|x-2|$, akkor $x=$

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{3}{2}$ (E) 2

3. Hány olyan pozitív egész *n* van, amelyre n^2-3n+2 prímszám?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) több mint 2, de véges sok (E) végtelen sok

4. Mekkora területet fog közre az *x* tengely pozitív félegyenese, az *y* tengely pozitív félegyenese és az $f:R\to R,\ f(x)=-3\cdot|x-1|+9$ függvény grafikonja?

(A) 15 (B) 13,5 (C) 21 (D) 42 (E) 27

5. Egy háromszög köré írt körének sugara *r*, belső szögeinek aránya 5:12:13. A háromszög legrövidebb oldala egyenlő hosszú az *r* sugarú körbe írt szabályos *n* oldalú sokszög oldalával. Ekkor $n=$

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 10 (E) 12

6. Az *ABC* háromszög *AC* oldalának felezőpontja *P*, *BC* oldalának felezőpontja *Q*. A *C* csúcsra illeszkedő, *AB*-vel párhuzamos egyenes *g*. Mozgassuk *C*-t *g*-n. Az alábbi négy adat közül hány fog változni a mozgatás hatására?

(1) a *PQ* szakasz hossza

(2) az *ABC* háromszög kerülete

(3) az *ABC* háromszög területe

(4) az *ABQP* trapéz területe

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

7. Az *n* pozitív egész szám három egymást követő pozitív egész szám szorzata és osztható 7-tel. Melyik állítás nem igaz a következők közül?

(A) *n* biztosan osztható 6-tal. (B) *n* biztosan osztható 14-gyel. (C) *n* biztosan osztható 21-gyel. (D) *n* biztosan osztható 28-cal. (E) *n* biztosan osztható 42-vel.

8. Tudjuk, hogy $a+1=b+2=c+3=d+4=a+b+c+d+5$. Ekkor $a+b+c+d=$

(A) –5 (B) $-\frac{10}{3}$ (C) $-\frac{7}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$ (E) 5

9. Az első száz pozitív egész szám közül véletlenszerűen kiválasztottunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy páros, de 3-mal nem osztható számot választottunk?

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{33}{100}$ (C) $\frac{17}{50}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{18}{25}$

10. Egy kocka élének hossza *n* (*n* pozitív egész). A kockának minden lapját befestjük pirosra, majd szétvágjuk n^3 darab egységnyi élű kiskockára. Ha tudjuk, hogy a kiskockák összfelszínének negyede piros, akkor $n=$

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

11. Ha a tízes számrendszerben felírt $\overline{95d}$ háromjegyű számból kivonjuk a számjegyek fordított sorrendjével felírt háromjegyű számot, akkor a különbség olyan háromjegyű szám, amelynek számjegyei ugyanazok, mint az eredeti számban, csak más sorrendben. Ekkor $d =$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 8

12. Az AD szakaszon a B pont az A-hoz közelebb, a C pont pedig a D-hez közelebb úgy helyezkedik el, hogy teljesülnek a következők: $AB = CD$ és $BC = 12$. Az E pont nem illeszkedik az AD egyenesre, és $BE = CE = 10$. Az ADE háromszög kerülete kétszer akkora, mint a BCE háromszög kerülete. Milyen hosszú az AB szakasz?

(A) $\frac{15}{2}$ (B) 8 (C) $\frac{17}{2}$ (D) 9 (E) $\frac{19}{2}$

13. Mely x valós szám esetén teljesül bármely valós y-ra a következő egyenlet:

$$8xy - 12y + 2x - 3 = 0\,?$$

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ és $-\frac{1}{4}$ (C) $-\frac{2}{3}$ és $-\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $-\frac{3}{2}$ és $-\frac{1}{4}$

14. Katának és Daninak is van egy doboza, mindkét dobozban öt golyó van, egy sárga, egy kék, egy piros, egy fehér és egy zöld. Kata véletlenszerűen kihúz egy golyót a dobozából és azt beleteszi Dani dobozába. Ezután Dani húz egy golyót véletlenszerűen a saját dobozából és azt beleteszi Kata dobozába. Mi a valószínűsége annak, hogy a két húzás után mindkét dobozban öt darab olyan golyó van, amelyek páronként különböző színűek?

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

15. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben két kör: az egyik középpontja a (2; 0) pont, a másik középpontja a (0; 2) pont. Mekkora a két körlap metszetének területe, ha mindkét kör sugara 2 egység?

(A) $\pi - 2$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{3}$ (D) $2 \cdot (\pi - 2)$ (E) π

16. Mennyi a $\frac{2013}{2014} \cdot x + 1 + \frac{1}{x} = 0$ egyenlet gyökei reciprokának összege?

(A) $-\frac{2014}{2013}$ (B) -1 (C) $\frac{2013}{2014}$ (D) 1 (E) $\frac{2014}{2013}$

17. Jelölje A a 4 első 2013 darab pozitív többszörösének, B pedig a 6 első 2013 darab pozitív többszörösének halmazát. Hány eleme van az $A \cap B$ halmaznak.

(A) 167 (B) 335 (C) 503 (D) 671 (E) 1006

18. Hány olyan négyjegyű szám van a tízes számrendszerben, amely 3-mal osztható és 13-ra végződik (azaz $\overline{ab13}$ alakú)?

(A) 27 (B) 30 (C) 33 (D) 81 (E) 90

19. Az $ABCD$ trapéz alapjai AB és CD. Mekkora a trapéz területe, ha $AB = 52$, $BC = 12$, $CD = 39$ és $DA = 5$?

(A) 182 (B) 195 (C) 210 (D) 234 (E) 260

20. Jelölje S_n az első *n* darab pozitív egész szám négyzetének összegét, Q_n pedig az első *n* darab pozitív egész szám összegének négyzetét. Melyik az a legkisebb pozitív egész *n*, amelyre $2013 < Q_n - S_n$?

(A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 17 (E) 2012

21. A $4x^2 + ax + 8x + 9 = 0$ egyenletnek egy valós gyöke van. A megfelelő *a* valós paraméterértékek összege

(A) –16 (B) –8 (C) 0 (D) 8 (E) 20

22. Tudjuk, hogy $\sin\alpha + \sin\beta = \sqrt{\frac{5}{3}}$ és $\cos\alpha + \cos\beta = 1$. Ekkor $\cos(\alpha - \beta) =$

(A) $\sqrt{\frac{5}{3}} - 1$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) 1

23. Véletlenszerűen kiválasztjuk a $\{2; 2^2; 2^3; ...; 2^{25}\}$ halmaz két különböző elemét, *a*-t és *b*-t. Mennyi annak a valószínűsége, hogy $\log_a b$ egész szám?

(A) $\frac{2}{25}$ (B) $\frac{31}{300}$ (C) $\frac{13}{100}$ (D) $\frac{7}{50}$ (E) $\frac{1}{2}$

24. Az *ABCD* négyszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben *A*(3; 9), *B*(1; 1), *C*(5; 3) és *D*(*a*; *b*). Tudjuk, hogy a négyszög mindegyik csúcsa a koordináta-rendszer első síknegyedében van, és az oldalfelező pontok négyzetet határoznak meg. Ekkor $a + b =$

(A) 7 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 16

25. Hány megoldása van az $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 48$ egyenletnek a nemnegatív egész számokból álló rendezett számnégyesek körében, ha $x_1 \geq 6$, $x_2 \geq 7$, $x_3 \geq 8$, $x_4 \geq 11$?

(A) 16 (B) 1024 (C) 969 (D) 18424 (E) 6545

Megoldó kulcs: DDBCC BDBCB DDDDD BDBCB ABBCC

A feladatsort dr. Kosztolányi József, a SZTE docense állította össze.