Bolyai János Matematikai Társulat Békés Megyei Tagozata
Oktatási Hivatal Békéscsabai Pedagógiai Oktatási Központ
2023. január 23.

XIV. Békés Megyei Középiskolai Matematikaverseny 2022/2023

III. kategória

Megoldások

1. a) Milyen x valós szám esetén veszi fel a $2-\left(x-\sqrt{2}\right)^2$ kifejezés a maximális értékét? Határozd meg ezt a maximális értéket is!

Megoldás:

A kéttagú különbség első tagja (kisebbítendő) konstans, a második tagja (kivonandó) pedig egy másodfokú, változó kifejezés (két tag különbségének négyzete).

A kivonandó, az $\left(x-\sqrt{2}\right)^2 \geq 0$ minden x-re.

Egy különbség, melynek első tagja konstans $(=2)$ akkor lesz a legnagyobb, ha a kivonandó a legkisebb.

Az $\left(x-\sqrt{2}\right)^2$ kifejezés legkisebb értéke a fentebbi ≥ 0 miatt 0 lesz, amit $x=\sqrt{2}$-nél fel is vesz.

A $2-\left(x-\sqrt{2}\right)^2$ kifejezés tehát a maximális értékét az $x=\sqrt{2}$ esetén veszi fel, és ez a maximális érték: $2-\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)^2=2-0^2=2-0=2$

b) Döntsd el, hogy a $2023^{2022}+1$ osztható-e 7-tel! Indokolj is!

Megoldás:

Egyszerű osztással igazolható, hogy a 7 osztója a 2023-nak $(2023=289\cdot 7)$

Ezt felhasználva a 2023^{2022} is osztható 7-tel.

Mivel a 2023^{2022} és a $2023^{2022}+1$ szomszédos egész számok, így mind a kettő nem lehet 7-tel osztható, tehát a $2023^{2022}+1$ nem osztható 7-tel.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésedre.
Válaszaidat kellően indokold, a gondolatod menete jól látható legyen!
Használható eszközök: számológép, függvénytáblázat, író- és rajzeszközök
Minden feladat helyes megoldásáért 10 pont jár.

2. Egy réten pontosan 50 bárány legelészik. Mindegyik bárány egyszínű, vagy fehér vagy fekete. Tudjuk, hogy biztos van közöttük fekete, és azt is, hogy bármelyik kettő közül legalább az egyik fehér. Hány fekete és hány fehér bárány legel a réten? Indokolj is!

Megoldás:

Válasszunk ki egy fekete bárányt! A feltételek miatt ilyen biztosan van, majd válasszunk mellé egy másikat!

Ez a másik választott bárány vagy fehér vagy fekete.

A feltételek szerint azonban legalább az egyik fehér a kiválasztottak közül.

Tehát a másodiknak választott bárány csak fehér lehet.

Ebből az is következik, hogy az elsőnek választott fekete bárány után egy második bárányt tetszőlegesen választva az csak fehér bárány lehet. Ellenkező esetben a két kiválasztott bárány mindegyike fekete lesz, ami ellentmond a feltételnek.

Ebből azonnal következik, hogy a bárányok között egyetlen fekete bárány van.

Mivel 50 bárány volt összesen, és ebből 1 volt fekete, így a fehér bárányok száma 49.

3. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{98x-49}=28x-56$$

Megoldás:

Az egyenlet értelmezési tartományát a négyzetgyök fogalmának felhasználásával írhatjuk fel:

$$98x-49\geq 0 \Rightarrow x\geq \frac{1}{2}$$

Az egyenlet mindkét oldalának négyzetre emelésével és rendezésével, majd egyszerűsítés után) kapjuk, hogy:

$$98x-49=784x^2-3136x+3136$$

$$784x^2-3234x+3185=0$$

$$16x^2-66x+65=0$$

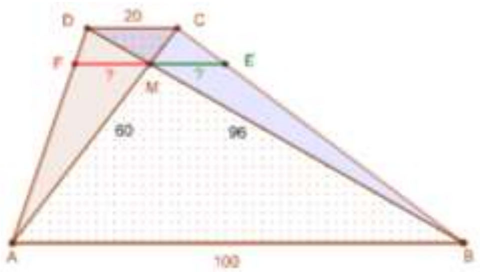
Ennek az egyenletnek a gyökei:

$x_1=\frac{5}{2}=2{,}5$ és $x_2=\frac{13}{8}=1{,}625$

Az eredeti egyenlet értelmezési tartománya alapján és az ellenőrzés elvégzésével meggyő-ződhetünk arról, hogy csak az $x_1=2{,}5$ lesz egyedül az eredeti egyenlet megoldása.

4. Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai (alapjai) $AB = 100$ cm és $CD = 20$ cm, átlói pedig $BD = 96$ cm és $AC = 60$ cm hosszúak. Legyen M az átlók metszéspontja! Az M ponton keresztül az alapokkal húzott párhuzamos egyenes a BC szárat az E pontban, a DA szárat pedig az F pontban metszi. Számítsd ki az EM és az MF szakaszok hosszát! Készíts vázlatot is a lényeges adatok feltüntetésével!

Megoldás:



A vázlat elkészítése, amelyből kiderül, hogy a diák megértette a feladatot.

Az $ABCD$ trapézban az AC és BD átlók, valamint az EF $(\ni M)$ párhuzamos szakasz berajzolása után több hasonló háromszöget kapunk a megfelelő szögek egyenlősége miatt.

Az ABM háromszög hasonló CDM háromszöghöz, mert $MAB\sphericalangle = MCD\sphericalangle$, ugyanígy $MBA\sphericalangle = MDC\sphericalangle$ (megfelelő váltószögek), valamint $AMB\sphericalangle = CMD\sphericalangle$ (csúcsszögek).

A hasonlóság arányát az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalainak (alapjainak) aránya adja:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{100}{20} = \frac{5}{1}$$

A két háromszög oldalai, mint az átlók részei is, ilyen arányban állnak egymással, vagyis az átlók $5:1$ arányban osztják kölcsönösen egymást.

$$AC \text{ átlónál: } AM = 50 \text{ cm és } MC = 10 \text{ cm}$$

$$BD \text{ átlónál: } BM = 80 \text{ cm és } MD = 16 \text{ cm.}$$

Mivel $CD \parallel EM$, így felírhatjuk a párhuzamos szelődarabok tételét a BCD háromszögre:

$$\frac{EM}{CD} = \frac{BM}{BD} \Rightarrow \frac{EM}{20} = \frac{80}{96} \Rightarrow EM = \frac{50}{3} \approx 16{,}7 \text{ cm}$$

Mivel $CD \parallel FM$, így felírhatjuk a párhuzamos szelődarabok tételét az ACD háromszögre is:

$$\frac{FM}{CD} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow \frac{FM}{20} = \frac{50}{60} \Rightarrow FM = \frac{50}{3} \approx 16{,}7 \text{ cm}$$

Megjegyzések:

- az utolsó két gondolati egységből az is látszik, hogy $EM = FM = 16\frac{2}{3}$ cm.
- a párhuzamos szelődarabok tétele helyett a hasonlóság is felhasználható
- az eredményeknél megfelel a pontos és a kerekített érték is

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésedre.
Válaszaidat kellően indokold, a gondolatod menete jól látható legyen!
Használható eszközök: számológép, függvénytáblázat, író- és rajzeszközök
Minden feladat helyes megoldásáért 10 pont jár.

5. Egy érettségire készülő tanulócsoportba 15 diák jár. Itt tanul a három jóbarát: Anikó, István és Gyuri is. Figyelembe véve, hogy a csoport tagjai egyformán jó képességűek, az egyik matematika csapatversenyre a tanárnőjük, Jutka néni, véletlenszerűen választja ki a tanulócsoportból a négy főből álló csapat tagjait.

   a) Hányféleképpen lehet négyfős csapatot kiválasztani a tanulócsoportból?

Megoldás:

Az 4 fő kiválasztása a 15 fős csoportból nem más, mint 15 különböző elemből kiválasztani 4-et, miközben a sorrend nem számít (ismétlés nélküli kombináció):

$$\binom{15}{4} = 1365$$

   b) Hányféleképpen lehet úgy a (négy főből álló) csapatot kiválasztani, hogy abban szerepeljen mindhárom jóbarát?

Megoldás:

Mivel a három jóbarátnak benne kell lenni a csapatban, őket mindenképpen ki kell választani, ezt egyféleképpen lehet megtenni.

A negyedik tagot padig a $15 - 3 = 12$ tanuló közül kell kiválasztani, ez 12 lehetőség.

Ez összesen $1 \cdot 12 = 12$ féle olyan négyfős csapatot jelent, amiben mind a három jóbarát benne van.

   c) A három jóbarátot tartalmazó csapatok száma hány %-a lesz a lehetséges csapatok számának? Az eredményt egy tizedes pontossággal add meg!

Megoldás:

Ki kell számolni, hogy a 12 hány %-a az 1365-nek.

$$\frac{12}{1365} \cdot 100 = \frac{1200}{1365} \approx 0{,}9\ \%$$

Tehát a három jóbarátot tartalmazó csapatok száma egy tizedes pontossággal 0,9 %-a lesz a lehetséges csapatok számának.