XIV. Békés Megyei Középiskolai Matematikaverseny
2022/2023
II. kategória
Megoldások

1. Két furfangos, nem *búsuló juhász* találkozott egy *nyári napnak alkonyulatánál,* és *meg-megálltak a kanyargó Tiszánál*. Miközben *terelgették nyájukat, fújták furulyájukat*, egyszer csak azt mondta az egyik: *ha adnál nekem* 8 *bárányt a tieid közül, akkor nekem is annyi bárányom lenne, mint neked.* Erre a másik azt válaszolta: *ha te adnád ide a bárányaid felét, akkor nekem* 7*-szer annyi bárányom lenne, mint neked.* Számoljuk ki, hány bárányt terelgetett az egyik, illetve a másik juhász!

Megoldás:

Jelöljük az első juhász bárányainak számát b-vel! Az első állítás szerint 16 a különbség a két juhász bárányainak száma között, tehát (feltételezve, hogy a bárányok száma egész) páros sok bárány van összesen), mivel $b+8=(b+16)-8=b+8$

Így a második juhásznak $b+16$ báránya van.

A második juhász feladványa alapján az első juhásznál maradna $b-\frac{b}{2}=\frac{b}{2}$, nála pedig $b+16+\frac{b}{2}=\frac{3}{2}b+16$ lenne.

Még az is igaz lenne a második juhász szerint, hogy:

$$7\cdot\frac{b}{2}=\frac{3}{2}b+16 \Rightarrow b=8$$

Tehát az első juhásznak 8 báránya, a másodiknak pedig 24 báránya van.

Ellenőrzés:

$$4+8=24-8=16$$

$$7(8-4)=24+4=28$$

Mivel mind a két állítás igaz, ezért a megoldásunk helyes.

2. Hány olyan z pozitív egész szám van ($z \epsilon Z^+$), amely esetén a $\frac{-z^2-1982}{4z-1984}$ kifejezés helyettesítési értéke pozitív lesz?

Megoldás:

Az algebrai tört értelmezési tartománya:

$$4z - 1984 \neq 0$$
$$z \neq 496$$

Ennek szükségességét jelenleg nem tudjuk.

Egy tört előjelét a számlálójának és nevezőjének előjele együttesen határozza meg. Egy tört akkor lesz pozitív előjelű, ha a számlálójának és a nevezőjének az előjele azonos ($\frac{+}{+}$ vagy $\frac{-}{-}$).

Vizsgáljuk a számláló előjelét!
Mivel $z^2 \geq 0$ minden z-re $\Rightarrow -z^2 \leq 0$, így $-z^2 - 1984 < 0$ minden z-re, vagyis a számláló minden esetben negatív.

Így a két lehetőség közül csak azt kell vizsgálni, amikor a nevező negatív ($\frac{-}{-}$).

$$4z - 1984 < 0$$
$$z < 496$$

Tehát a nevezőnek 496-nál kisebb pozitív egész számnak kell lenni.

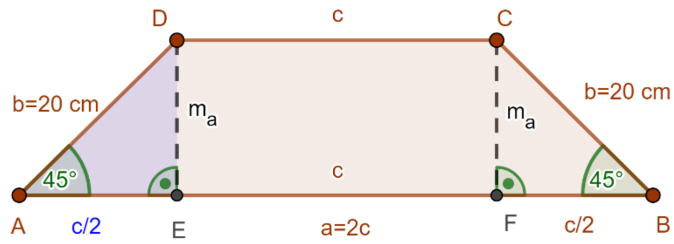
Ilyen egész szám 495 db van.

Mivel ezek az egész számok mindannyian benne vannak az algebrai tört értelmezési tartományában ($z \neq 496$), így a válaszunk helyes.

Megjegyzés: az algebrai tört előjelénél természetesen mindig a helyettesítési érték előjelét kell érteni

3. Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalainak (alapjainak) aránya $1:2$, hegyesszögeinek mértéke 45°, míg szárai (nem párhuzamos oldalai) 20 cm hosszúak. Határozzuk meg a trapéz kerületének és területének mértékét egy tizedesnyi pontossággal! (Készítsünk vázlatot az adatok feltüntetésével!)

Megoldás:



Vázlat elkészítése, amiből látható, hogy megértette a feladatot:

Ha a rövidebb alapot c-vel jelöljük ($CD = c$), akkor az alapok $1:2$ aránya miatt a hosszabb alap $AB = 2c$

Jelöljük a D-ből húzott magasságvonal talppontját E-vel, a C-ből húzottét pedig F-fel!

Kihasználva, hogy az $ABCD$ szimmetrikus trapéz, így $EF = c$ és $AE = BF = \frac{c}{2}$

Mivel $DAE\sphericalangle = 45°$és $DEA\sphericalangle = 90°$, ezért AED háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért $m_a = \frac{c}{2}$

Az AED derékszögű háromszögre felírva a Pitagorasz tételt:

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 + m_a^2 = b^2 \Rightarrow 2\left(\frac{c}{2}\right)^2 = 20^2 \Rightarrow \frac{c^2}{2} = 400 \Rightarrow c = \sqrt{800} = 20\sqrt{2} \approx 28{,}3 \text{ cm}$$

Ezt felhasználva: $a = 2c = 40\sqrt{2} \approx 56{,}6$ cm és $m_a = \frac{c}{2} = 10\sqrt{2} \approx 14{,}1$ cm

A trapéz kerülete: $k_{tr} = 56{,}6 + 20 + 28{,}3 + 20 = 124{,}9$ cm

A trapéz területe: $t_{tr} = \frac{56{,}6+28{,}3}{2} \cdot 14{,}2 \approx 602{,}8 \text{ cm}^2$

Megjegyzés: ha a kerekítéseket nem az elején végezzük el, ha pontos eredménnyel számolunk, akkor más, de helyes eredményt kaphatunk, pl.:

$$k_{tr} = 40\sqrt{2} + 20 + 20\sqrt{2} + 20 = 60\sqrt{2} + 40 \approx 124{,}9 \text{ cm}$$

$$t_{tr} = \frac{40\sqrt{2}+20\sqrt{2}}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 30\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} = 600 \text{ cm}^2$$

4. Fagy Iminél, a korzó tréfás cukrászánál háromféle fagyi kapható: csoki, vanília és puncs. Karácsonykor furfangos akciót hirdetett: aki meg tudja mondani, összesen hányféle 4 gömbös fagyi kelyhet tud készíteni a háromféle fagyiból, az vendége lesz egy ilyen kehelyre. Milyen számot kellene mondjunk, ha szeretnénk egy ilyen „ajándék kelyhet”? Két kelyhet akkor tekintünk különbözőnek, ha valamelyik(féle) fagyiból különböző számú gombóc van benne (a gombócok elhelyezkedése nem számít).

Megoldás (1):

Mivel háromféle fagyiból kell négygömbös kelyheket készíteni, ezért biztosan lesz egyforma fagyi a kehelyben. Ezért célszerű az egyforma gömbök számát vizsgálva összeszámlálni.

1. eset, ha mind a négy gömb ugyanaz: 3 lehetőségünk van

2. eset, ha három egyforma, a negyedik különböző: a három egyformára 3 lehetőségünk van, a negyedik kiválasztásához mindegyik esetben 2 lehetőségünk van a maradék kétféléből. Ez összesen: $3 \cdot 2 = 6$ lehetőség.

3. eset, ha két-két egyforma gömb lesz: a kimaradt féle alapján legegyszerűbb összeszámolni. Ha kétfajtából lesz $2 - 2$, akkor egyfajta marad ki, ez 3 lehetőség.

4. eset, ha két egyforma van és egy-egy különböző: a két egyforma kiválasztására az összesből 3 lehetőségünk van. A maradék két gömböt pedig csak egyféleképpen lehet hozzátenni, ha a másik kétféléből egy-egy gömböt választunk, ami 1 lehetőséget jelent. Ez összesen: $3 \cdot 1 = 3$ lehetőség.

Ha ezeket a lehetőségeket összeadjuk, megkapjuk, hogy összesen hányféle fagyi kelyhet lehet készíteni a háromféle fagyiból: $3 + 6 + 3 + 3 = 15$

Ha Fagy Iminek a 15-as számot mondjuk, biztosan megkapjuk az ajándék kelyhet.

Megoldás (2):

A lehetőségek egy lehetséges rendszer szerinti felsorolásával is ugyanezt az eredmény kapjuk. Jelen felsorolás a fenti szisztémát követi.

fagyi fajták		
c	v	p

1. eset, ha mind a négy gömb ugyanaz: 3 lehetőségünk van

1.	c	c	c	c
2.	v	v	v	v
3.	p	p	p	p

2. eset, ha három egyforma, a negyedik különböző: 6 lehetőség

4.	c	c	c	v
5.	c	c	c	p
6.	v	v	v	c
7.	v	v	v	p
8.	p	p	p	c
9.	p	p	p	v

3. eset, ha két-két egyforma gömb lesz: 3 lehetőség

10.	c	c	v	v
11.	c	c	p	p
12.	v	v	p	p

4. eset, ha két egyforma van és egy-egy különböző: 3 lehetőség

13.	c	c	v	p
14.	v	v	p	c
15.	p	p	c	v

Összes lehetőség: $3 + 6 + 3 + 3 = 15$

5. Oldd meg a következő egyenletet a negatív valós számok ($x \epsilon R^-$) halmazán!

$$\left||x^2-855|-2022\right|-2023=0$$

Megoldás:

$$\left||x^2-855|-2022\right|=2023$$

1. eset: $|x^2-855|-2022=-2023 \Rightarrow |x^2-855|=-1$, ami nem lehetséges az abszolútérték definíciója miatt, tehát ez az eset nem eredményez megoldást

2. eset: $|x^2-855|-2022=2023 \Rightarrow |x^2-855|=4045$

2.a) eset: $x^2-855=-4045 \Rightarrow x^2=-3190$, ami nem lehetséges ($x^2 \geq 0$), tehát ez az eset sem eredményez megoldást

2.b) eset: $x^2-855=4045 \Rightarrow x^2=4900 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \quad 70 \notin R^- \Rightarrow \text{nem megoldás} \\ x_2 = -70 \in R^- \Rightarrow \text{lehet megoldás} \end{array}$

Ellenőrzés:

$$\left||(-70)^2-855|-2022\right|-2023=0$$

$$\left||4900-855|-2022\right|-2023=0$$

$$\left||4045|-2022\right|-2023=0$$

$$|4045-2022|-2023=0$$

$$|2023|-2023=0$$

$$2023-2023=0$$

$$0=0$$

Mivel a behelyettesítés után igaz állítást kaptunk, ezért az egyenlet megoldása a negatív számok halmazán: $x=-70$

Megjegyzés: az ellenőrzésnél nem szükséges ennyire részletezni a számolást, illetve a behelyettesítés helyett hivatkozhatunk az ekvivalens átalakításokra is.