Bolyai János Matematikai Társulat Békés Megyei Tagozata
Oktatási Hivatal Békéscsabai Pedagógiai Oktatási Központ
2023. január 23.

XIV. Békés Megyei Középiskolai Matematikaverseny 2022/2023

IV. kategória

Megoldások

1. a) Milyen x valós szám esetén veszi fel a $3-\left(x+\sqrt{7}\right)^2$ kifejezés a maximális értékét? Határozd meg ezt a maximális értéket is!

Megoldás:

A kéttagú különbség első tagja (kisebbítendő) konstans, a második tagja (kivonandó) pedig egy másodfokú, változó kifejezés (két tag összegének négyzete).

A kivonandó, az $\left(x+\sqrt{7}\right)^2 \geq 0$ minden x-re.

Egy különbség, melynek első tagja konstans $(=3)$ akkor lesz a legnagyobb, ha a kivonandó a legkisebb.

Az $\left(x+\sqrt{7}\right)^2$ kifejezés legkisebb értéke a fentebbi ≥ 0 miatt 0 lesz, amit $x=-\sqrt{7}$-nél fel is vesz.

A $3-\left(x+\sqrt{7}\right)^2$ kifejezés tehát a maximális értékét az $x=-\sqrt{7}$ esetén veszi fel, és ez a maximális érték: $3-\left(-\sqrt{7}+\sqrt{7}\right)^2=3-0^2=3-0=3$

b) Összeadtunk 2023 darab különböző pozitív prímszámot, az összeadás eredménye egy páros szám lett. Melyik volt az összeadott számok közül a legkisebb?

Megoldás:

Ha a 2023 (páratlan) db összeadott pozitív prímszám mind páratlan lenne, akkor az összegük is páratlan lenne. Tudjuk, hogy az összeg páros, így nem lehet mindegyik szám páratlan.

Kell lenni közöttük párosnak is. A pozitív prímek között egyetlen páros van, a 2.

Így az összeadandók között az egyetlen pozitív páros is szerepel, ami a legkisebb pozitív prímszám. Rajta kívül lesz még 2022 db páratlan szám, amelyek összege is páros lesz, amihez a 2-t hozzáadva szintén páros összeget kapunk.

Tehát az összeadott számok között a legkisebb a 2 volt.

2. Egy réten pontosan 70 bárány legelészik. Mindegyik bárány egyszínű, vagy fehér vagy fekete. Tudjuk, hogy biztos van közöttük fehér, és azt is, hogy bármelyik kettő közül legalább az egyik fekete. Hány fehér és hány fekete bárány legel a réten? Indokolj is!

Megoldás:

Válasszunk ki egy fehér bárányt! A feltételek miatt ilyen biztosan van, majd válasszunk mellé egy másikat!

Ez a másik választott bárány vagy fehér vagy fekete.

A feltételek szerint azonban legalább az egyik fekete a kiválasztottak közül.

Tehát a másodiknak választott bárány csak fekete lehet.

Ebből az is következik, hogy az elsőnek választott fehér bárány után egy második bárányt tetszőlegesen választva az csak fekete bárány lehet. Ellenkező esetben a két kiválasztott bárány mindegyike fehér lesz, ami ellentmond a feltételnek.

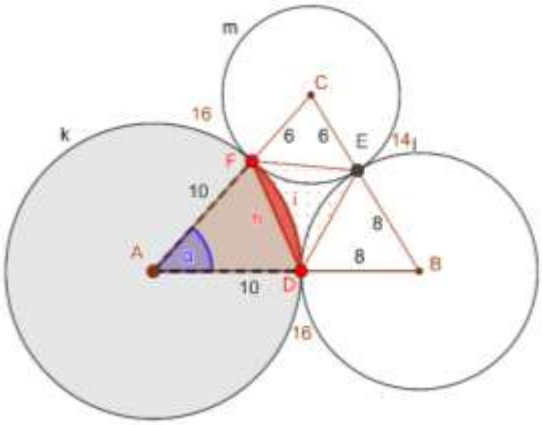
Ebből azonnal következik, hogy a bárányok között egyetlen fehér bárány van.

Mivel 70 bárány volt összesen, és ebből 1 volt fehér, így a fekete bárányok száma 69.

3. Három, egy síkban lévő kör kölcsönösen érinti egymást kívülről (egyik kör sem tartalmazza a másikat). Mekkora a körök érintési pontjai által meghatározott háromszög és a legnagyobb sugarú kör közös részének (körszelet) területe, ha a körök sugarai rendre 10 cm, 8 cm és 6 cm? Válaszodat egy tizedesnyire kerekítve add meg! Készíts vázlatrajzot is a lényeges adatok feltüntetésével!

Megoldás:

Kössük össze előbb a körök középpontjait $(A;\ B;\ C)$, majd az érintési pontokat $(D; E;\ F)$! Kihasználva, hogy az érintő körök esetén a körök középpontjai és az érintési pontjuk egy egyenesre esik (kollineárisok), így az ABC háromszög olyan, amely három oldalának egy-egy belső pontja lesz az DEF háromszög egy-egy csúcspontja. A keletkezett ABC háromszög oldalait a két-két sugár összegéből kapjuk: 18 cm, 16 cm és 14 cm



A keresett síkrész, a DEF háromszög és a k kör közös része megegyezik $hDiF$ körszelettel, amelynek területét megkapjuk, ha az $ADiF$ körcikk területéből kivonjuk az ADF háromszög területét.

Ehhez szükség lesz az ABC háromszög A csúcsánál lévő $\propto$ belső szögére, amit a koszinusz-tétellel kiszámíthatunk:

$$\cos\propto=\frac{16^2+18^2-14^2}{2\cdot 16\cdot 18}=\frac{2}{3}\approx 0{,}6667\Rightarrow \propto=48{,}2^{\circ}$$

Az $\propto$ szög és a kör sugarának felhasználásával az $ADiF$ körcikk területe:

$$t_{ADiF}=\frac{10^2\cdot\pi\cdot 48{,}2^{\circ}}{360^{\circ}}\approx 42{,}1\ \text{cm}^2$$

Az ADF háromszög területe a háromszög trigonometrikus területképletével:

$$t_{ADF}=\frac{10^2\cdot sin 48{,}2^{\circ}}{2}\approx 37{,}3\ \text{cm}^2$$

Így a körök érintési pontjai által meghatározott háromszög és a legnagyobb sugarú kör közös részének (körszelet) területe, a keresett $hDiF$ körszelet területe kerekítve:

$$t_{hDiF}=t_{ADiF}-t_{ADF}=42{,}1-37{,}3=4{,}8\ \text{cm}^2$$

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésedre.
Válaszaidat kellően indokold, a gondolatod menete jól látható legyen!
Használható eszközök: számológép, függvénytáblázat, író- és rajzeszközök
Minden feladat helyes megoldásáért 10 pont jár.

4. Bogyó és Babóca szabályos dobókockákkal (pöttyök száma $1-6$.) egy dobozban található „cukorkákért játszik". Megállapodás szerint Bogyó vehet egy cukorkát a dobozból, ha egy kockát háromszor egymás után feldobva legalább az egyiken 6-ost dob (felül 6 pötty lesz). Babóca akkor vehet a dobozból, ha háromszor feldobva két dobókockát, legalább az egyik esetben a kockapárossal dobott számok összege pontosan 12 lesz. Ki hány % eséllyel (valószínűséggel) húzhat cukorkát a dobozból? Válaszodat egy tizedesjegyre kerekítve add meg!

Megoldás (1): komplementer események vizsgálatával, valószínűségek közötti műveletek felhasználásával

Vizsgáljuk először azt, hogy Bogyó milyen eséllyel vehet cukrot a dobozból: $P(Bo) = ?$

Annak valószínűsége, hogy egy kockával 6-ost dob, az $\frac{1}{6}$, így annak valószínűsége, hogy egy kockával nem dob 6-ost, az $\frac{5}{6}$.

Számítsuk ki most a komplementer esemény ($\overline{Bo}$) valószínűségét, azaz annak, hogy 3 dobást elvégezve egymás után, egyszer sem dobunk hatost:

$$P(\overline{Bo}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$$

Annak valószínűsége, hogy Bogyó vehet cukorkát a dobozból, vagyis legalább egyszer 6-ost dob:

$$P(Bo) = 1 - P(\overline{Bo}) = 1 - \frac{5^3}{6^3} = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 0{,}421 \Rightarrow 42{,}1\%$$

Vizsgáljuk most azt, hogy Babóca milyen eséllyel vehet cukrot a dobozból: $P(Ba) = ?$

Nála is célszerű a komplementer esemény ($\overline{Ba}$) valószínűségét megállapítani először.

Annak valószínűsége, hogy két kockával dobva egyszerre, az összeg nem lesz 12, az $\frac{35}{36}$, mert az összes lehetőség $6 \cdot 6 = 36$, mivel a 12 összeg csak egyféleképpen állítható elő, éspedig $6 + 6 = 12$, ezért a kedvező lehetőségek száma $36 - 1 = 35$.

Számítsuk ki most annak a valószínűségét, hogy háromszor feldobva a két dobókockát, egyik kockapároson sem lesz 12 az összeg (komplementer):

$$P(\overline{Ba}) = \frac{35}{36} \cdot \frac{35}{36} \cdot \frac{35}{36} = \frac{35^3}{36^3} = \frac{42875}{46656}$$

Annak valószínűsége, hogy Babóca vehet cukorkát a dobozból, vagyis legalább az egyik esetben a kockapárossal dobott számok összege pontosan 12 lesz:

$$P(Ba) = 1 - P(\overline{Ba}) = 1 - \frac{35^3}{36^3} = 1 - \frac{42875}{46656} = \frac{3781}{46656} \approx 0{,}081 \Rightarrow 8{,}1\%$$

Összefoglalva: Bogyó $\approx 42{,}1\%$, Babóca pedig $\approx 8{,}1\%$ eséllyel vehet cukorkát a dobozból.

Megjegyzés: indoklás nélkül felhasználtuk a következő tételeket

- $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$, ha A és B független események
- $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

Megoldás (2): mindkét esetben a kedvező és az összes esetek összeszámlálásával, azok hányadosának kiszámításával

Vizsgáljuk először azt, hogy Bogyó milyen eséllyel vehet cukrot a dobozból: $P(Bo) = ?$

Mivel minden kockán 6 féle lehetőség van, ezért a három kocka egymás utáni feldobásakor az összes lehetőségek száma az ismétléses variáció miatt: $6^3 = 216$

A komplementer esemény ($\overline{Bo}$) az, hogy semelyik kockán nem lesz 6-os. Ezek száma az előbbihez hasonlóan az ismétléses variáció miatt: $5^3 = 125$

A kedvező lehetőségek számát úgy kapjuk, hogy az összes lehetőségek számából kivonjuk a nem kedvező esetek számát: $6^3 - 5^3 = 216 - 125 = 91$

Így annak a valószínűsége, hogy Bogyó vehet cukorkát a dobozból, vagyis, hogy legalább egyszer 6-ost dob:

$$P(Bo) = \frac{kedvező\ esetek\ száma}{összes\ esetek\ száma} = \frac{6^3 - 5^3}{6^3} = \frac{91}{216} \approx 0{,}421 \Rightarrow 42{,}1\%$$

Vizsgáljuk most azt, hogy Babóca milyen eséllyel vehet cukrot a dobozból: $P(Ba) = ?$

Nála is célszerűbb lenne a komplementer esemény ($\overline{Ba}$) lehetőségeit megszámlálni, de most inkább az eredeti eseményt (Ba) vizsgáljuk.

Mivel egy kockapáros feldobásakor a lehetőségek száma 6^2, így a három kockapáros feldobásának összes lehetősége az ismétléses variáció miatt: $(6^2)^3 = 36^3 = 46656$

A kedvező esetek megszámlálását három esetre kell bontani (esetvizsgálat):

- mindhárom kockapároson 12 $(= 6 + 6)$ az összeg: $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ lehetőség
- egy kockapároson 12 az összeg, a többin nem: $3 \cdot 1 \cdot 35 \cdot 35 = 3 \cdot 35^2 = 3675$ lehetőség (három közül csak az egyik kockapároson lesz 12, és két kockapároson $36 - 1 = 35$ lehetőség van arra, hogy ne 12 legyen az összeg)

- két kockapároson 12 az összeg, a harmadikon nem: $3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 35 = 3 \cdot 35 = 105$ lehetőség (három közül három féle lehetőség a két 12-esre, csak az egyik kockapároson nem lesz 12, és ezen $36 - 1 = 35$ lehetőség van arra, hogy ne 12 legyen az összeg)

Így a kedvező esetek száma: $1 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 = 1 + 3675 + 105$ = 3781

Így annak a valószínűsége, hogy Babóca vehet cukorkát a dobozból, vagyis, vagyis, hogy legalább az egyik esetben a kockapárossal dobott számok összege pontosan 12 lesz:

$$P(Ba) = \frac{kedvező\ esetek\ száma}{összes\ esetek\ száma} = \frac{3781}{36^3} = \frac{3781}{46656} \approx 0{,}081 \Rightarrow 8{,}1\%$$

Összefoglalva: Bogyó $\approx 42{,}1\%$, Babóca pedig $\approx 8{,}1\%$ eséllyel vehet cukorkát a dobozból.

Megjegyzés: a %-ok nagy eltéréséből megállapíthatjuk azt is (nem volt kérdés), hogy Bogyó és Babóca között ez a feltételrendszer egyáltalán nem tűnik igazságosnak

5. Négy szám közül az első három egy számtani, az utolsó három pedig egy mértani sorozat szomszédos tagja. Az első három szám összege 2022, az utolsó három szám szorzata pedig 2023. Határozd meg a négy szám pontos (nem kerekített) értékét!

Megoldás:

Célszerű a számtani sorozatot alkotó első három szám közül a középsőt x-szel jelölni.

Ha a számtani sorozat differenciáját d-vel jelöljük, felhasználjuk a számtani sorozat egyik tulajdonságát és a feladat első feltételét (tagok összeg 2022), akkor a következő egyenletet kapjuk:

$$x - d + x + x + d = 2022$$

Ebből az egyenletből kapjuk, hogy a négy szám között a második szám: $x = 674$

Felhasználva az $x = 674$-et és d-t, az első három számra a következőket kapjuk:

$$674 - d;\ 674;\ 674 + d;$$

Jelöljük a negyedik számot m-mel!

$$674 - d;\ 674;\ 674 + d; m$$

Mivel az utolsó 3 szám egy mértani sorozat egymást követő tagjai, így:

$$674 \cdot m = (674 + d)^2 \Rightarrow m = \frac{(674 + d)^2}{674}$$

A második feltétel alapján az utolsó három szám szorzatára felírhatjuk az alábbi egyenletet:

$$674 \cdot (674 + d) \cdot \frac{(674 + d)^2}{674} = 2023$$

A baloldalon elvégezve az egyszerűsítést, majd a szorzást, kapjuk:

$$(674 + d)^3 = 2023$$

Ebből: $d = \sqrt[3]{2023} - 674 \Rightarrow m = \frac{\left(\sqrt[3]{2023}\right)^2}{674} = \frac{\sqrt[3]{2023^2}}{674}$

Ezek után felírhatjuk a négy számot az $x = 674$, a $d = \sqrt[3]{2023} - 674$ és $m = \frac{\sqrt[3]{2023^2}}{674}$ rész-eredményeket felhasználva:

$$1348 - \sqrt[3]{2023};\ 674;\ \sqrt[3]{2023};\ \frac{\sqrt[3]{2023^2}}{674}$$

A számok más alakban is megadhatók, pl.: $\frac{2}{3} \cdot 2022 - \sqrt[3]{2023},\ \frac{1}{3} \cdot 2022;\ \sqrt[3]{2023};\ \frac{3 \cdot \sqrt[3]{2023^2}}{2022}$