Bolyai János Matematikai Társulat Békés Megyei Tagozata
Oktatási Hivatal Békéscsabai Pedagógiai Oktatási Központ
2023. január 23.

XIV. Békés Megyei Középiskolai Matematikaverseny
2022/2023
I. kategória
Megoldások

1. Ernő bácsi a saját és gyermeke életkorára vonatkozó kérdésre furfangosan válaszolt: ha a gyermekem jelenlegi életkorához még hozzáadom annak a háromnegyedét, akkor 35 évet kapok; én pedig most éppen két és félszer vagyok idősebb a gyermekemnél. Mennyi idős volt a gyermek, mikor Ernő bácsi 35 éves volt?

Megoldás:

Jelöljük Ernő bácsi jelenlegi életkorát E-vel, gyermeke jelenlegi életkorát pedig G-vel!

A gyermekre vonatkozó első feltétel alapján:

$$G+\frac{3}{4}G=35 \Rightarrow G=20$$

Tehát Ernő bácsi gyermeke jelenleg 20 éves.

A második feltétel alapján:

$$E=2{,}5G$$

Ebbe behelyettesítjük a már megkapott $G=20$ értéket:

$$E=2{,}5\cdot 20 \Rightarrow E=50$$

Tehát Ernő bácsi jelenleg 50 éves.

Ernő bácsi $50-35=15$ éve volt 35 éves, így a gyermeke 15 évvel ezelőtt $20-15=5$ éves volt.

Ellenőrzés:

$$20+\tfrac{3}{4}\cdot 20=35 \Rightarrow 20+15=35 \Longrightarrow 35=35 \Longrightarrow \text{igaz}$$

$$50=2{,}5\cdot 20 \Longrightarrow 50=50 \Rightarrow \text{igaz}$$

$$50-35=15 \text{ és } 20-15=5 \Rightarrow \text{igaz}$$

Mivel mindhárom esetben igaz állítást kaptunk, így az életkorra adott válaszunk helyes.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésedre.
Válaszaidat kellően indokold, a gondolatod menete jól látható legyen!
Használható eszközök: számológép, függvénytáblázat, író- és rajzeszközök
Minden feladat helyes megoldásáért 10 pont jár.

2. Határozd meg azt a legnagyobb x egész számot ($x \epsilon Z$), amely esetén a $\frac{x^2+1982}{4x-1984}$ kifejezés helyettesítési értéke negatív lesz!

Megoldás:

Az algebrai tört értelmezési tartománya:

$$4x - 1984 \neq 0$$
$$x \neq 496$$

Ennek szükségességét jelenleg nem tudjuk.

Egy tört előjelét a számlálójának és nevezőjének előjele együttesen határozza meg.
Egy tört akkor lesz negatív előjelű, ha a számlálójának és a nevezőjének az előjele ellentétes ($\frac{+}{-}$vagy $\frac{-}{+}$).

Vizsgáljuk a számláló előjelét!
Mivel $x^2 \geq 0$ minden x-re, így $x^2 + 1982 > 0$ minden x-re, vagyis a számláló minden esetben pozitív.

Így a két lehetőség közül csak azt kell vizsgálni, amikor a nevező negatív ($\frac{+}{-}$).

$$4x - 1984 < 0$$
$$x < 496$$

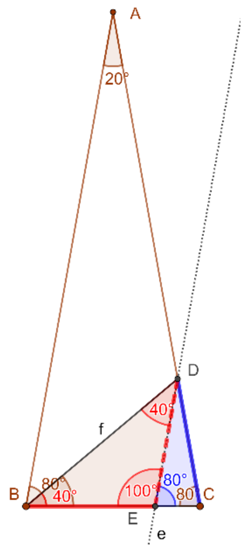
Tehát a nevezőnek 496-nál kisebbnek kell lenni. Ezen egész számok közül a legnagyobb a $x = 495$.
Mivel a $x = 495$ benne van az algebrai tört értelmezési tartományában ($x \neq 496$), így a $x = 495$ szám lesz a legnagyobb egész, amely esetén a tört előjele negatív lesz.

Megjegyzés: az algebrai tört előjelénél természetesen mindig a helyettesítési érték előjelét kell érteni

3. Az ABC háromszögben $AB = AC$, az A csúcsnál lévő belső szög 20°-os. A B csúcsnál lévő ABC szög (belső) szögfelezője az AC oldalt D pontban, míg az AB oldallal párhuzamos és a D pontra illeszkedő egyenes a BC oldalt E pontban metszi. Igazoljuk, hogy $BE = CD$!

Megoldás:

Vázlat elkészítése, amiből látható, hogy megértette a feladatot:



Kihasználva, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú háromszög ($AB = AC$):

$$ABC\measuredangle = ACB\measuredangle = \frac{180°-20°}{2} = 80° \qquad (1)$$

Mivel BD szögfelező és $DE \parallel AB$, így $DBE\measuredangle = 40°$ és $DEC\measuredangle = 80°$ (2)

$$DEB\measuredangle \text{ kiegészítő szög} \Rightarrow DEB\measuredangle = 100° \Rightarrow BDE\measuredangle = 40° \qquad (3)$$

Összefoglalva (1), (2), (3) (kihasználva, hogy egy háromszögben egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak vannak, egyenlő szárú háromszög):

$$DBE\measuredangle = BDE\measuredangle = 40° \Rightarrow BE = DE$$

$$DEC\measuredangle = DCE\measuredangle = ACB\measuredangle = 80° \Rightarrow DC = DE$$

A két egyenlőséget összevetve kapjuk:

$$BE = DC$$

4. Hány olyan háromjegyű, páratlan természetes szám van, amelynek az első vagy az utolsó (közülük legalább az egyik) számjegye 7-től különbözik?

Megoldás (1):

I. Először összeszámláljuk azokat az eseteket, amelyekben se a százasok, se az egyesek helyén nem áll 7-es szám:

A százasok helyén 0 nem lehet, mert háromjegyű szám, 7 pedig a feltétel miatt nem lehet. Összesen 8 lehetőség.

A tízesek helyén minden számjegy lehet Összesen 10 lehetőség.

Az egyesek helyén csak páratlan, 7-től különböző szám állhat. Összesen 4 lehetőség.

Ilyen feltételekkel ez összesen: $8 \cdot 10 \cdot 4 = 320$ lehetőség

II. Másodszorra összeszámláljuk azokat az eseteket, amelyekben a százasok helyén a 7-es áll, de az egyesek helyén nem áll 7-es szám (a kettő közül csak az egyesek helyén nem áll a 7-es):

A százasok helyén a 7-es áll, ez 1 lehetőség.

A tízesek helyén minden számjegy lehet Összesen ez 10 lehetőség.

Az egyesek helyén csak páratlan, 7-től különböző szám állhat. Összesen 4 lehetőség.

Ilyen feltételekkel ez összesen: $1 \cdot 10 \cdot 4 = 40$ lehetőség

III. Harmadszorra összeszámláljuk azokat az eseteket, amelyekben a százasok helyén nem a 7-es áll, de az egyesek helyén a 7-es szám áll (a kettő közül csak a százasok helyén nem áll a 7-es):

A százasok helyén 0 nem lehet, mert háromjegyű szám, 7 pedig a feltétel miatt nem lehet. Összesen 8 lehetőség.

A tízesek helyén minden számjegy lehet Összesen ez 10 lehetőség.

Az egyesek helyén a 7-es áll, ez 1 lehetőség.

Ilyen feltételekkel ez összesen: $8 \cdot 10 \cdot 1 = 80$ lehetőség

A három esetet egybe véve az összes, a feltételeknek megfelelő olyan háromjegyű szám, amelyeknek az első vagy az utolsó (legalább az egyik) számjegye 7-től különbözik.:

$$320 + 40 + 80 = 440$$

Megoldás (2) (komplementer halmazzal)***:***

A háromjegyű pozitív egész számok száma összesen 900 db

A háromjegyű pozitív, páratlan egész számok száma összesen 450 db

Annak a feltételnek a „tagadása”, hogy vagy a százasok, vagy az egyesek helyén (legalább az egyiken) nem 7-es áll, az, hogy mind a kettő helyen 7-es áll. Ezek mind páratlanok a 7-es végződés miatt.

Azon pozitív háromjegyű egész számok száma, amelyben a százasok és az egyesek helyén is (mindkét helyen) 7-es áll, $1 \cdot 10 \cdot 1 = 10$, mert a százasok és az egyesek helyén $1 - 1$ lehetőség van (7-es), a tízesek helyén pedig 10 lehetőség van.

A feltételeknek megfelelő számok számát úgy kapjuk meg, hogy az összesből kivonjuk a számunkra nem megfelelőket (komplementer):

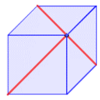
$$450 - 10 = 440$$

5. A jövő évi, XV. BMKM-re kiírt jelkép- (kabala) pályázaton a következő terv nyert: egy 15 cm élű fehér fakocka minden oldallapjának minden átlóját (lapátlóját) nagyon vékony, de jól látható piros vonallal megrajzolták. Egy ilyen kockát a verseny után a szervezők az oldallapokkal párhuzamos síkokkal szétvágnak 1 cm élű kockákra.

   a) Hány darab olyan „kis” kocka keletkezik, amelynek valamelyik oldallapján látható lesz annak piros (lap)átlója?

Megoldás:

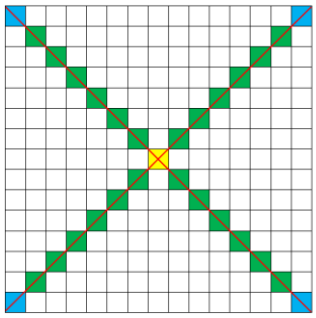
A nagy kocka minden csúcsában van egy-egy olyan kocka, amelynek három lapátlója is pirosan látszik. Egy-egy ilyen kis kockának a nagy kocka három lapjával is van közös része. Ezek megfelelnek a feltételnek: ez összesen 8 kocka (lejjebb kék).



Vizsgáljuk a nagy kocka egyik lapján látható két átlót, hány kis kocka lapátlóján megy keresztül!

Egy lapátló a 15 cm-es élhossz miatt egy oldallapon 15 négyzetnek (zöld, sárga, kék) lesz átlója. A másik lapátló is 15 négyzetnek (zöld, sárga, kék) lesz lapátlója, de mind a két lapátló átlóegyenese lesz a lap közepén lévő négyzetnek (sárga) a páratlan szám miatt.

Így ezen a lapon a két lapátló $15 + 15 - 1 = 29$ négyzet, egyben kis kocka lapjának átlóegyenese lesz.



Mivel a csúcsoknál lévő (kék) kis kockák lapátlói (3) több lapon is megjelennek, ezért a nagy kocka ezen lapján $29 - 4 = 25$ olyan kis kocka látható, amelynek a lapátlója csak itt látható.

Ha ezt a 6 lapnál összeadjuk, és hozzáadjuk a nagy kocka csúcsinál lévő 8 kis kockát, akkor megkapjuk az összes piros lapátlójú kis kockák számát: $6 \cdot 25 + 8 = 158$

   b) Hány százaléka ez a szétvágással létrejött összes kis kocka számának?

Megoldás:

Az összes kis kockák száma $15^3 = 3375$

Piros lapátlójú kiskocák ehhez viszonyított %-a: $\frac{158}{3375} \cdot 100 \approx 4{,}7\%$

Tehát a piros lapátlójú kis kockák száma $\approx 4{,}7\%$-a a szétvágással létrejött összes kis kocka számának