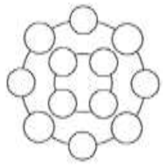
XIV. Békés Megyei Középiskolai Matematikaverseny
2022/2023
V. kategória
Megoldások

1. Helyezd el az egész számokat 1-től 12-ig a kis körökben úgy, hogy a belső gyűrűben lévő négy szám összege fele legyen a külső gyűrűben lévő számok összegének! Minden számot pontosan egyszer használj fel! A számok sorrendje a gyűrűkben nem számít. Elegendő csak egy megoldást adnod.



Megoldás:

$1-12$-ig az egész számok összege 78

A 78-at kell felbontani $2:1$ arányban

Belső gyűrű: 1 rész$=1\cdot\frac{78}{3}=26$

Külső gyűrű: 2 rész$=2\cdot\frac{78}{3}=52$

Egy lehetőség a számok kiválasztására:

Belső gyűrű: 5; 6; 7; 8 (összeg$=26$)

Külső gyűrű: 1; 2; 3; 4; 9; 10; 11; 12 (összeg$=52$)

Megjegyzések:

- természetesen más számokkal is kijönnek ezek az összegek
- nem szükséges a számolásokat precízen leírni, de látható kell, legyen a gondolatmenet a maximális pontszámért

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésedre.
Válaszaidat kellően indokold, a gondolatod menete jól látható legyen!
Használható eszközök: számológép, függvénytáblázat, író- és rajzeszközök
Minden feladat helyes megoldásáért 10 pont jár.

2. Jancsi a 2023-as új év négy számjegyét felírta egy-egy kártyára. $\boxed{2}$ $\boxed{0}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

   a) Legkevesebb hányszor kellene leírni egymás után a 2023 négyjegyű számot, hogy az így kapott szám osztható legyen 3-mal?

Megoldás (1):

A 3-mal való oszthatóság feltétele, hogy a számjegyek összege osztható legyen 3-mal

2023-ban a számjegyek összege $= 7$, ez nem osztható 3-mal, így a 2023 sem osztható 3-mal.

Ha a 2023-at kétszer leírjuk egymás után, a 20232023 nyolcjegyű számban a számjegyek összege $= 14$, ez sem osztható 3-mal, így a 20232023 sem osztható 3-mal.

Ha a 2023-at háromszor leírjuk egymás után, a 202320232023 tizenkétjegyű számban a számjegyek összege $= 21$, ami már osztható 3-mal, így 202320232023 is osztható 3-mal.

Tehát legkevesebb háromszor kell leírni egymás után a 2023 négyjegyű számot, hogy az így kapott szám osztható legyen 3-mal

Megoldás (2) (próbálgatással, összes eset kipróbálásával):

Végezzük el az osztásokat az elejétől addig, amíg 3-mal osztható számot kapunk!

$2023 : 3 = 674,\dot{3} \notin Z \Rightarrow$ nem osztható 3-mal, nem elég egyszer leírni

$20232023 : 3 = 6744007,\dot{6} \notin Z \Rightarrow$ nem osztható 3-mal, nem elég kétszer leírni

$202320232023 : 3 = 67440077341 \in Z \Rightarrow$ osztható 3-mal, elég háromszor leírni

Mivel a legkisebbtől kezdtük, mindent kipróbáltunk, ezért ez bizonyítás erejű, tovább nem kell vizsgálni.

b) Összesen hány évszámot lehet előállítani mindegyik számkártya pontosan egyszeri felhasználásával?

Megoldás (1) (felsorolással)***:***

Legegyszerűbb megoldás, ha valamilyen rendszer szerint leírjuk a várhatóan nem sok megoldást. Táblázatba is foglalhatjuk. A rendszer azért fontos (nem kötelező), mert így nem marad el egy sem, nem is írunk többet le.

Egy lehetséges rendszer: először a 3-ast fixáljuk, utána pedig a 0-t mozgatjuk. Természetesen ki kell használni azt, hogy az ezresek helyén (helyiértékén) nem állhat 0.

Igaz, háromjegyű évszám is előállítható (pl. 223, esetleg a 896), de ezekben az esetekben nem használtuk volna fel mind a négy kártyát.

	ezresek	százasok	tízesek	egyese
1.	3	0	2	2
2.	3	2	0	2
3.	3	2	2	0
4.	2	3	0	2
5.	2	3	2	0
6.	2	0	3	2
7.	2	2	3	0
8.	2	0	2	3
9.	2	2	0	3

Megoldás (2) (összeszámlálással)***:***

Összeszámlálással a fenti táblázat szisztémáját követve:

A 3-as az ezresek helyén legyen: a 0 három helyre (százasok, tízesek, egyesek) kerülhet, a 2-esek pedig már fixek, ez 3 lehetőség $\{1., 2., 3.\}$.

A 3-as a százasok helyén legyen: a 0 két helyre (tízesek és egyesek) kerülhet, a 2-esek pedig már fixek, ez 2 lehetőség $\{4., 5.\}$.

A 3-as a tízesek helyén legyen: a 0 két helyre (százasok és egyesek) kerülhet, a 2-esek pedig már fixek, ez 2 lehetőség $\{6., 7.\}$.

A 3-as az egyesek helyén legyen: a 0 két helyre (százasok és tízesek) kerülhet, a 2-esek pedig már fixek, ez 2 lehetőség $\{8., 9.\}$.

Összesen $3 + 2 + 2 + 2 = 9$ lehetőség.

Megjegyzés: természetesen összeszámlálhatjuk így is az eseteket: az első helyre 3 (nem lehet 0), a második helyre ismét 3 (már lehet a 0), a harmadik helyre 2, a negyedik helyre 1 lehetőség. Ez összesen $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$. Mivel a kettesek ismétlődnek: $\frac{18}{2} = 9$ ilyen szám van.

3. A négygyermekes Nagy családban jelenleg Elena 4, Emma 7, Boró 11, Beni 14, anyukájuk 41, apukájuk pedig 43 éves. Hány éves lesz Elena, a legfiatalabb családtag akkor, ha a családtagok életkorának összege 150 év lesz?

Megoldás:

A Nagy család tagjai életkorainak jelenlegi összege:

$$4+7+11+14+41+43=120 \text{ év}$$

A két időszak összegeinek különbsége:

$$150-120=30 \text{ év}$$

Mivel mindenki „azonos évvel lett idősebb”, így az eltelt évek száma (mindenki ennyivel lett idősebb):

$$\frac{30}{6}=5 \text{ év}$$

Tehát Elena életkora a kérdezett időszakban, vagyis öt év múlva:

$$4+5=9 \text{ év}$$

4. Egy középiskola egyik osztályából 15-en vettek részt matematikaversenyen, 19-en pedig fizikaversenyen. Tudjuk, hogy közülük 8 tanuló mindkét versenyen indult, és azt is tudjuk, hogy az osztály minden tanulója elindult ezek közül valamelyik versenyen.

   a) Hány tanulója van ennek az osztálynak?

Megoldás:

Vezessük be a következő halmazjelöléseket!

$$O = \{\text{osztály tanulói}\}$$

$$M = \{\text{matematikaversenyen résztvevő tanulók}\}$$

$$F = \{\text{fizikaversenyen résztvevő tanulók}\}$$

$$\Downarrow$$

$$M \cap F = \{\text{mindkét versenyen résztvevő tanulók}\}$$

A feltételek alapján az egyes halmazok elemszáma a következő:

$$|M| = 15 \quad |F| = 19 \qquad |M \cap F| = 8$$

Csak matematikaversenyen indulók:

$$|M \setminus F| = |M| - |M \cap F| = 15 - 8 = 7$$

Csak fizikaversenyen indulók:

$$|F \setminus M| = |F| - |M \cap F| = 19 - 8 = 11$$

Az osztály tanulóinak a száma a diszjunkt részhalmazok miatt:

$$|O| = 7 + 8 + 11 + 0 = 26$$

   b) Hányan indultak ezek közül pont egy versenyen?

Megoldás:

Azoknak a részhalmazoknak az elemszámait kell összeadni, amelyekben nincs benne a közös rész, vagy az osztály létszámából, ki kell vonni a mindkét versenyen résztvevők számát.

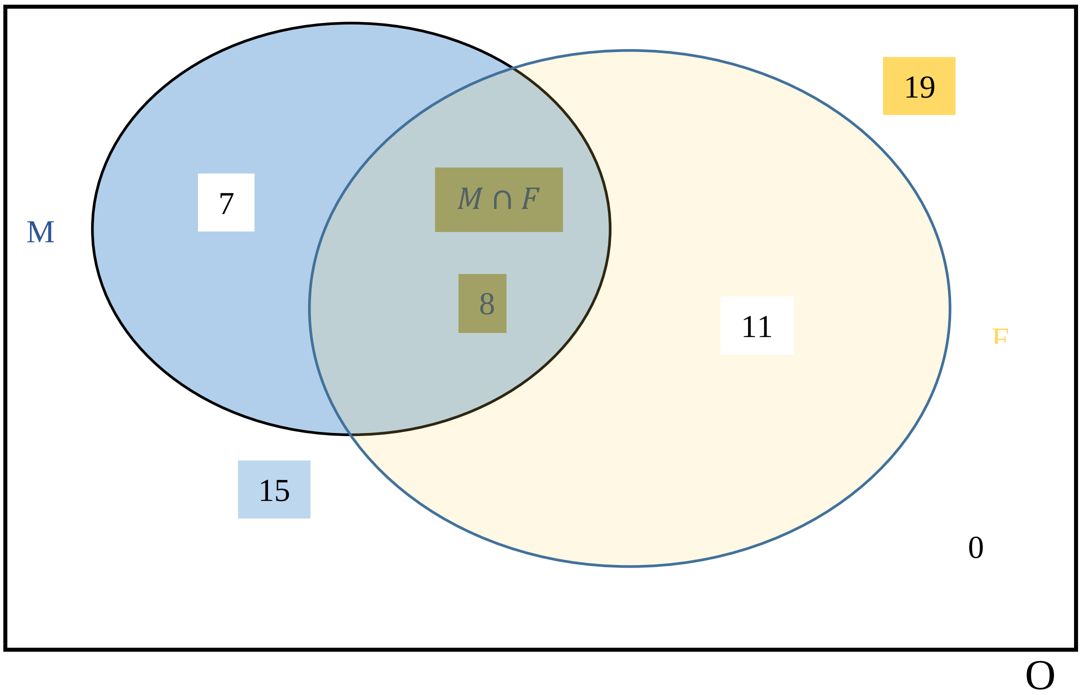
$$|M \setminus F| + |F \setminus M| = 7 + 11 = 18$$

vagy:

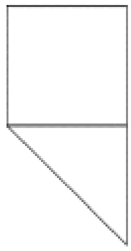
$$|M \setminus F| + |F \setminus M| = |O| - |M \cap F| = 26 - 8 = 18$$

c) Szemléltesd az osztály szerkezetét ilyen halmazábrával, a halmazok megjelölésével, egészítsd ki a részhalmazok adataival!

Megoldás:

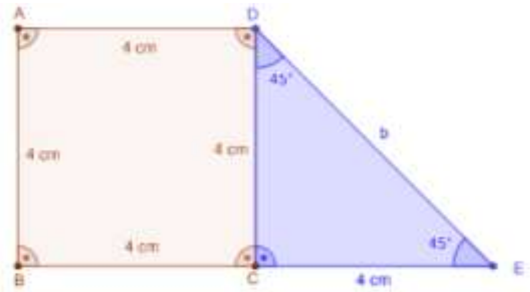


5. Egy 4 cm oldalú négyzet egyik oldalára az ábrához hasonlóan kifelé rajzolj egy egyenlő szárú derékszögű háromszöget úgy, hogy a derékszögű háromszög egyik befogója a négyzet oldalával azonos legyen, arra illeszkedjen! Így a négyzetből és a háromszögből egy új síkidom keletkezik.



a) Készíts vázlatot a lényeges adatok megjelölésével!

Megoldás:



b) Számítsd ki a keletkezett alakzat legnagyobb szögét!

Megoldás:

Az $ABCD$ négyzetből és a DCE egyenlő szárú derékszögű háromszögből a konstrukció alapján az $ABED$ derékszögű trapéz keletkezik (nem kell megnevezni).

Mivel DCE egyenlő szárú derékszögű háromszög, így $EDC\measuredangle = CED\measuredangle = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

Kihasználva még, hogy a négyzet minden szöge derékszög, így az $ABED$ derékszögű trapéz legnagyobb szöge:

$$ADE\sphericalangle = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$$

c) Mekkora az így kapott geometriai alakzat területe?

Megoldás:

Az $ABED$ derékszögű trapéz az $ABCD$ négyzetből és a DCE egyenlő szárú derékszögű háromszögből keletkezett pontos illesztéssel (nincs átfedés), így:

$$t_{ABED} = t_{ABCD} + t_{DCE} = 4 \cdot 4 + \frac{4 \cdot 4}{2} = 16 + 8 = 24 \text{ cm}^2$$

d) Mekkora ennek az alakzatnak a kerülete? Az eredményt egy tizedes jegyre kerekítsd!

Megoldás:

Az $ABED$ derékszögű trapéz minden oldalát ismerjük, kivéve az ED szárát.

Az ED szár a DCE egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója, amelyre a Pitagorasz tétel felírható:

$$4^2 + 4^2 = b^2$$

Ebből:

$$b = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}7 \text{ cm}$$

Az $ABED$ derékszögű trapéz kerülete:

$$k_{ABED} = 4 \cdot 4 + 4\sqrt{2} = 16 + 4\sqrt{2} \approx 21.7 \text{ cm}^2$$