

XVI. Békés Vármegyei Középiskolai Matematikaverseny

2024/2025

IV. kategória

1. Hetedhétországban a telefonszámok hét számjegyből állnak, és minden számjegy 7-nél kisebb. Az ország lakosai között kiosztották az összes lehetséges ilyen tulajdonságú telefonszámot. Kiderült, hogy minden lakosnak pontosan egy telefonszám jutott. VII. Hetetlennek (ő az ország királya) a telefonszáma: 000 – 0000.

a) Hány lakosa van Hetedhétországnak? (2 pont)

VII. Hetetlen véletlenszerűen kiválasztott egy telefonszámot.

b) Mennyi annak a valószínűsége (esélye), hogy egy olyan számot választott, amelynek az első három számjegye azonos, míg az utolsó négy számjegye az első háromtól és egymástól is páronként különböző számjegy? (4 pont)

Megoldás:

A „felhasználható” számjegyek: 0, 1, 2, 3, 4, 5 és 6 (a telefonszámok kezdődhetnek 0-val is).

a) A lehetséges telefonszámok (az ország lakosainak) száma:

$$\underline{7} \underline{7} \underline{7} \underline{7} \underline{7} \underline{7} \underline{7} \Rightarrow 7^7 = 823543 \text{ vagy } V_7^{7;i} = 7^7 = 823543$$

b) Összes (lehetséges) esetek száma: 823543

$$\text{Kedvező esetek száma: } \underbrace{a \ a \ a}_7 \ \underline{6} \ \underline{5} \ \underline{4} \ \underline{3} \Rightarrow 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520 \text{ vagy } V_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!} = 2520$$

$$\text{A keresett valószínűség: } p = \frac{2520}{823543} = \frac{360}{117649} \approx 0,00306$$

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésedre.

Válaszaidat számolással, szövegesen kellően indokold, a gondolatod menete jól látható legyen!

Használható eszközök: számológép, függvénytáblázat, író- és rajzeszközök

A feladatok helyes megoldásáért rendre 6; 8; 10; 12 és 14 pont jár.

2. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\sqrt{4x^2 + 729} = 45$ (4 pont)

b) $\frac{3^{4x+1} \cdot 9^{3x-2}}{27^{2x+3}} = 81^{15}$ (4 pont)

Megoldás:

a) $\sqrt{4x^2 + 729} = 45$

Felhasználva, hogy tetszőleges x valós szám esetén $x^2 \geq 0$, így $4x^2 + 729 > 0$, ezért az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

Négyzetre emelés után a $4x^2 + 729 = 2025$ egyenlethez jutunk, ahonnan $x^2 = \frac{1296}{4} = 324$. A másodfokú egyenlet megoldásai $x = 18$ és $x = -18$. A kapott értékek kielégítik az eredeti egyenletet, melyről behelyettesítés útján meggyőződhetünk.

b) $\frac{3^{4x+1} \cdot 9^{3x-2}}{27^{2x+3}} = 81^{15}$

A hatványazonosságok figyelembevételével

$$9^{3x-2} = (3^2)^{3x-2} = 3^{6x-4} \quad 27^{2x+3} = (3^3)^{2x+3} = 3^{6x+9} \quad 81^{15} = (3^4)^{15} = 3^{60}, \text{ így}$$

$$\frac{3^{4x+1} \cdot 3^{6x-4}}{3^{6x+9}} = 3^{60} \Rightarrow 3^{4x+1+6x-4-6x-9} = 3^{60} \Rightarrow 3^{4x-12} = 3^{60}$$

Az $x \rightarrow 3^x$ függvény szigorúan monoton (növekvő), így a $4x - 12 = 60$ egyenlethez jutunk, melynek megoldása $x = 18$. A kapott érték kielégíti az eredeti egyenletet, melyről behelyettesítés útján meggyőződhetünk.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésedre.

Válaszaidat számolással, szövegesen kellően indokold, a gondolatod menete jól látható legyen!

Használható eszközök: számológép, függvénytáblázat, író- és rajzeszközök

A feladatok helyes megoldásáért rendre 6; 8; 10; 12 és 14 pont jár.

3. Egy számtani sorozat első három tagjának összege -27 , a következő három tag összege -18 .
- a) Határozd meg az első 75 tag összegét! (5 pont)

Adott az $S = 2025 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2024)$ összeg. Mely állítások igazak az S -re?

- b1) S prímszám b2) S négyzetszám b3) S -nek 45 pozitív osztója van (5 pont)

Megoldás:

- a) Legyen $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ az adott számtani sorozat. A feladat feltételei alapján:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = -27 \\ a_4 + a_5 + a_6 = -18 \end{cases}$$

Figyelembe véve, hogy $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, ($n \geq 2$), ahol d a számtani sorozat differenciája, az alábbi (kétismeretlenes) egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = -27 \\ (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a_1 + 3d = -27 \\ 3a_1 + 12d = -18 \end{cases}$$

A két egyenlőség különbségéből $9d = 9$, ahonnan $d = 1$, majd a kapott eredmény alapján $a_1 = -10$.

Felhasználva, hogy a számtani sorozat első n tagjának összege $S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$, kap-

juk hogy $S_{75} = \frac{2 \cdot (-10) + 74 \cdot 1}{2} \cdot 75 = 27 \cdot 75 = 2025$.

- b) Felhasználva, hogy $1 + 2 + 3 + \dots + 2024 = \frac{2024 \cdot 2025}{2}$ ($= 2049300$), így

$$S = 2025 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2024) = 2025 + 2 \cdot \frac{2024 \cdot 2025}{2} = 2025 \cdot 2025 = 2025^2 (= 4100625).$$

Mindezeket figyelembe véve

b1) Az állítás **hamis**, hiszen az S osztható például 3-mal és 5-tel is;

b2) Az állítás **igaz**, mert az S a 2025-nek a négyzete;

b3) A $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, így az S prímtényezősz felbontásában $S = 2025^2 = (3^4 \cdot 5^2)^2 = 3^8 \cdot 5^4$, ahonnan az S (pozitív) osztóinak száma $(8+1) \cdot (4+1) = 45$, tehát az állítás **igaz**.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésedre.

Válaszaidat számolással, szövegesen kellően indokold, a gondolatod menete jól látható legyen!

Használható eszközök: számológép, függvénytáblázat, író- és rajzeszközök

A feladatok helyes megoldásáért rendre 6; 8; 10; 12 és 14 pont jár.

4. A Különös szülők Szilveszter nevű gyermekük születésekor, és azután a gyermek minden születésnapján befizettek egy bankszámlára 500 ezer petákot, egészen addig, amíg a gyermek el nem érte a 14 éves kort. Ezután hat éven keresztül nem történt befizetés a számlára.

a) Mekkora összeghez juthatott ily módon 20 éves korában Szilveszter? (8 pont)

Szilveszter úgy döntött, hogy a megtakarítást 5 év alatt fogja teljesen felhasználni úgy, hogy minden évben a születésnapján (először a huszonegyedikén) azonos összeget fog kivenni a bankból.

b) Mennyi az évente felvehető összeg? (4 pont)

A bank végig 4,5 %-os éves kamatlábbal számol, és a kamattjovíráás mindig Szilveszter születésnapja előtt egy nappal történik meg. Válaszodat mindkét esetben ezer petákra kerekítve add meg!

Megoldás:

a) Jelölje S a húsz év alatt „megtakarított” összeget.

Az „első” 14 évben gyűjtőjárdék alapján történik a megtakarítás, ahol az éves (állandó) kamatláb $p = 0,045$, a kamattényező $q = 1 + 0,045 = 1,045$ és az éves állandó befizetés mértéke $a = 500000$. Így, ha S_1 jelöli a „megtakarított összeget”, akkor

$$S_1 = a \cdot q \cdot \frac{q^{14} - 1}{q - 1} = 500000 \cdot 1,045 \cdot \frac{1,045^{14} - 1}{1,045 - 1} \approx 9892027 \text{ (peták)}$$

A rákövetkező hat évben nem történt befizetés, ezért az addig megtakarított összeg „csak” kamatozik. Így a hat év alatt „magnövekedett összeg”:

$$S = S_1 \cdot q^6 = 9892027 \cdot 1,045^6 \approx 12881992,5 \text{ (peták)}$$

Tehát Szilveszter 20 éves korára 12882 ezer peták „megtakarítással rendelkezik”.

- b) A soron következő években Szilveszter a megtakarított összeget „törlesztőjárdék, hiteltörlesztés” alapján fogja felvenni, ahol a az éves (állandó) összeg, az évek száma $n = 5$, míg a kamattényező továbbra is $q = 1,045$. Ekkor

$$a = S \cdot \frac{q^5 \cdot p}{q^5 - 1} = 12881992,5 \cdot \frac{1,045^5 \cdot 0,045}{1,045^5 - 1} \approx 2934410,2 \text{ (peták)}$$

Tehát Szilveszter 2934 ezer petákot vehet fel évente.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésedre.

Válaszaidat számolással, szövegesen kellően indokold, a gondolatod menete jól látható legyen!

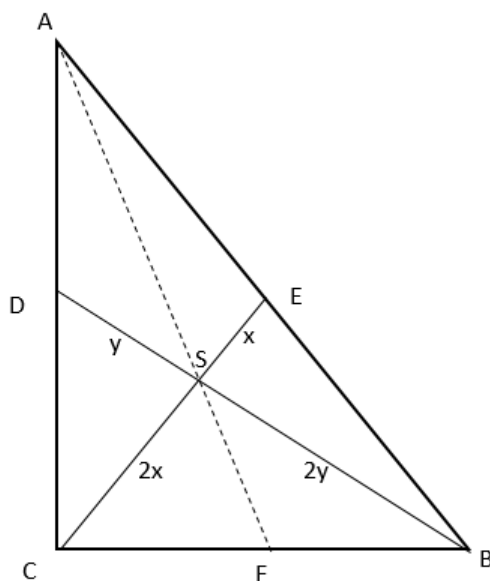
Használható eszközök: számológép, függvénytáblázat, író- és rajzeszközök

A feladatok helyes megoldásáért rendre 6; 8; 10; 12 és 14 pont jár.

5. Az ABC derékszögű háromszögben $BC = 12$ cm, míg az AC befogóhoz tartozó súlyvonal merőleges az AB átfogóhoz tartozó súlyvonalra.
- a) Mennyi a BC oldalhoz tartozó súlyvonal hosszának pontos értéke? (10 pont)
- b) Számold ki a $\frac{r}{R}$ arányt két tizedesnyi pontossággal, ahol r és R az ABC háromszögbe, illetve a háromszög köré írható kör sugara! (4 pont)

Megoldás:

a)



Legyen D az AC , E az AB és F az BC oldal felezőpontja.

BD és CE súlyvonalak merőlegesek egymásra, S metszéspontjuk (az ABC háromszög súlypontja) $2:1$ arányban osztja a súlyvonalakat.

Legyen $SE = x$, $SD = y$, így $CS = 2x$ és $BS = 2y$, ahol $x, y \in \mathbb{R}^+$.

A Thalész-tétel alapján E pont az ABC háromszög köré írható kör középpontja, így

$$AE = BE = CE = \frac{AB}{2} = 3x.$$

A Pitagorasz-tételt alkalmazva rendre az SCB és SEB háromszögekben az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 = 12^2 \\ x^2 + 4y^2 = 9x^2 \end{cases}$$

A két egyenlőség különbségéből $3x^2 = 144 - 9x^2$, majd átrendezés után $12x^2 = 144$, ahonnan $x^2 = 12$. A másodfokú egyenlet gyökei $x = \sqrt{12} (= 2\sqrt{3})$ és $x = -\sqrt{12}$, ez utóbbi nem megoldás, mert az x pozitív valós szám.

Ha $x^2 = 12$, akkor $y^2 = 24$, ahonnan (figyelembe véve, hogy az y pozitív valós szám) következik, hogy $y = \sqrt{24} (= 2\sqrt{6})$. A kapott eredmények alapján $CE = 3x = 3\sqrt{12} (= 6\sqrt{3})$, $AB = 6x = 6\sqrt{12} (= 12\sqrt{3})$ és $BD = 3y = 3\sqrt{24} (= 6\sqrt{6})$.

A Pitagorasz-tételt alkalmazva, előbb az ABC háromszögben

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow AC^2 + 12^2 = 36 \cdot 12 \Rightarrow AC^2 = 288 \Rightarrow AC = \sqrt{288} (= 12\sqrt{2}),$$

majd az ACF háromszögben

$$AC^2 + CF^2 = AF^2 \Rightarrow 288 + 6^2 = AF^2 \Rightarrow AF^2 = 324 \Rightarrow AF = 18$$

Tehát a BC oldalhoz tartozó súlyvonal hossza 18 cm.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésedre.

Válaszaidat számolással, szövegesen kellően indokold, a gondolatod menete jól látható legyen!

Használható eszközök: számológép, függvénytáblázat, író- és rajzeszközök

A feladatok helyes megoldásáért rendre 6; 8; 10; 12 és 14 pont jár.

b) Az a) pontbeli számítások alapján $R = CE = 3\sqrt{12} (= 6\sqrt{3})$.

Derékszögű háromszögben a beírható kör átmérője egyenlő a befogók összegéből kivonva az átfogót, azaz $2r = BC + AC - AB = 12 + 12\sqrt{2} - 12\sqrt{3}$, ahonnan $r = 6 + 6\sqrt{2} - 6\sqrt{3}$.

Mindezek alapján

$$\frac{r}{R} = \frac{6 + 6\sqrt{2} - 6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{6(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})}{6\sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \left(= \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}} - 1 \right) \approx 0,39.$$

Tehát a $\frac{r}{R}$ arány (két tizedesnyi pontossággal) 0,39.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésedre.

Válaszaidat számolással, szövegesen kellően indokold, a gondolatod menete jól látható legyen!

Használható eszközök: számológép, függvénytáblázat, író- és rajzeszközök

A feladatok helyes megoldásáért rendre 6; 8; 10; 12 és 14 pont jár.