Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LIII. esztendő

2014-2015. tanév

9. évfolyam

I. forduló

1. Az a, b, c pozitív egész számokra $c^2 = a^2 + b^2$. Mutassuk meg, hogy ekkor a $c^2 - ab$ és a $c^2 + ab$ is előáll két pozitív egész szám négyzetének összegeként.

2. Van-e olyan háromszög, amelynek magasságai 4, 7 és 10 egység hosszúak? (A választ indokolni kell.)

3. Egy matematika szakkörön a tanár felírt egy 50 000-nél kisebb pozitív egész számot a táblára. A szakkörön jelen levő 12 tanuló mindegyike mondott egy állítást a felírt számról, amelyek az elhangzás sorrendjében a következők voltak:
(1) osztható 2-vel; (2) osztható 3-mal; (3) osztható 4-gyel; (4) osztható 5-tel;
(5) osztható 6-tal; (6) osztható 7-tel; (7) osztható 8-cal; (8) osztható 9-cel;
(9) osztható 10-zel; (10) osztható 11-gyel; (11) osztható 12-vel; (12) osztható 13-mal.
A tanár megállapította, hogy 10 igaz és 2 hamis állítás van az elhangzottak között, és a két hamis állítás közvetlenül egymás után hangzott el.
Melyik számot írta fel a tanár a táblára?

4. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek mindegyikének pontosan kétszeri felhasználásával képezzünk prímszámokat úgy, hogy az így képzett prímek összege a lehető legkisebb legyen. Mennyi ez a legkisebb összeg?

5. Bizonyítsuk be, hogy bármely hegyesszögű háromszög legalább háromféleképpen vágható szét egyenes szakaszokkal három darab tengelyesen szimmetrikus sokszögre.

6. *a*) Van-e az első kilenc pozitív egész számnak olyan $a_1, a_2, ..., a_9$ sorrendje, hogy az

$$|a_1 - 1|, |a_2 - 2|, ..., |a_9 - 9|$$

számok páronként különbözők?
b) Van-e az első tíz pozitív egész számnak olyan $a_1, a_2, ..., a_{10}$ sorrendje, hogy az

$$|a_1 - 1|, |a_2 - 2|, ..., |a_{10} - 10|$$

számok páronként különbözők?
(A választ indokolni kell.)