Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LX. esztendő

2023-2024. tanév

12. évfolyam

I. forduló

1. Határozzuk meg az m paraméter összes olyan egész értékét, amelyre a

$$\frac{2x^2+mx+2m+2}{x^2+2mx+2m^2+1}>1$$

egyenlőtlenség minden valós x esetén teljesül.

2. Az ABC hegyesszögű háromszög BC oldalának felezőmerőlegese a háromszög köré írható kör A csúcsot nem tartalmazó BC ívét A_1-ben metszi. Hasonló módon kapjuk a B_1 és C_1 pontokat. Legyen O a háromszög beírható körének középpontja. Az OB és az A_1C_1 szakaszok metszéspontja P, az OC és az A_1B_1 szakaszok metszéspontja Q, az OA és a B_1C_1 szakaszok metszéspontja pedig R. Bizonyítsuk be, hogy a PQR háromszög hasonló az eredeti ABC háromszöghöz.

3. Melyek azok a kétjegyű pozitív egész számok, amelyek négyzetéből levonva a számjegyek felcserélésével kapott kétjegyű szám négyzetét, pozitív négyzetszámot kapunk?

4. Az $x^2+y^2-4x-8y+p=0$ és $x^2+y^2-24x-16y+q=0$ egyenletű körök kívülről érintik egymást. E két körhöz a $P(6;\ 0)$ pontból húzható érintők ugyanakkora szöget zárnak be egymással. Számítsuk ki a két kör sugarát.

5. Egy háromszögben az oldalak hossza a, b, c, a köré írt kör sugara R. Mekkora a háromszög területe, ha $R\cdot(a+b)=c\cdot\sqrt{a\cdot b}$, és a leghosszabb oldal hossza 1?

6. Igaz-e, hogy minden pozitív egész n esetén van $2n+1$ darab egymást követő természetes szám, hogy ezek közül az első $n+1$ darab négyzetének összege egyenlő az ezeket követő n darab négyzetének összegével? (A választ indokolni kell.)