

Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny L. esztendő

2011-2012. tanév

10. évfolyam

Döntő

1. Határozzuk meg az a valós paraméter összes olyan értékét, amelyre az

$$\frac{1+x}{ax-x^2} - \frac{1-x}{ax+x^2} = \frac{(x+1)(x-6)}{x^2-a^2}$$

egyenletnek két különböző pozitív egész gyöke van.

2. Az ABC háromszögben $AB = 7$, $AC = 8$, $BC = 9$. Az A csúsból induló belső szögfelező a háromszög köré írt körét a D pontban metszi. Számítsuk ki az $\frac{AD}{CD}$ hányadost.

3. Határozzuk meg azokat a p és q prímszámokat, amelyekre $p^2 + 3pq + q^2$ négyzetszám (egy pozitív egész szám négyzete).

4. Az ABC háromszög AB oldalának C_1 , BC oldalának A_1 és CA oldalának B_1 pontjára teljesül:

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{1}{3}.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha K az ABC háromszög kerülete, k pedig az $A_1B_1C_1$ háromszög kerülete, akkor $\frac{K}{2} < k < \frac{3K}{4}$.

5. A síkot felosztottuk n darab egyenessel 1000 részre. Legalább hány egyenest kellett ehhez felhasználnunk?

6. A $H = \{1; 2; \dots; 15\}$ halmaz egy részhalmaza jó, ha nincs három olyan eleme, melyek szorzata négyzetszám. Legfeljebb hány eleme lehet egy jó részhalmaznak?