Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny L. esztendő

2011-2012. tanév

11. évfolyam

I. forduló

1. Tudjuk, hogy az $x^2+2(m-2)x+m^2-3m+3=0$ egyenletnek két különböző valós gyöke van ($m \geq -1$ valós paraméter). Határozzuk meg az

$$\frac{mx_1^2}{1-x_1}+\frac{mx_2^2}{1-x_2}$$

kifejezés maximumát, ha x_1 és x_2 az egyenlet gyökei.

2. Az *ABC* hegyesszögű háromszögnek *D* belső pontja. *D*-ből az *AB* oldalra állított merőleges talppontja *P*, az *AC* oldalra állított merőleges talppontja *Q*. A *BC* oldal felezőpontja *F*. Mutassuk meg, hogy $PF=QF$ akkor és csak akkor, ha a *BDP* és *CDQ* szögek egyenlő nagyságúak.

3. Mely pozitív egész *n* esetén négyzetszám az $n^2+19n+48$ kifejezés értéke?

4. Egy háromszög oldalainak hossza *a*, *b*, *c*. Bizonyítsuk be, hogy ha $a+b+c=2$, akkor

$$abc+1 \leq ab+bc+ca \leq abc+\frac{28}{27}.$$

5. Az *ABC* hegyesszögű háromszögben $AB<AC$. Az *A* csúcsból induló magasság talppontja *D*, az *AD* magasság egy pontja *P*. *P*-ből az *AC* oldalra állított merőleges talppontja *E*, az *AB* oldalra állított merőleges talppontja *F*. O_1 a *BDF*, O_2 a *CDE* háromszög köré írható kör középpontja. Bizonyítsuk be, hogy O_1, O_2, *E* és *F* akkor és csak akkor illeszkednek egy körre, ha *P* az *ABC* háromszög magasságpontja.

6. Egy 7x8-as (7 sor, 8 oszlop) sakktábla minden mezőjén van egy pénzérme. Két pénzérme szomszédos, ha élben vagy csúcsban csatlakozó mezőkön találhatók. Pénzérmék egy ötelemű csoportja rendelkezik az *A* tulajdonsággal, ha vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan egy szomszédos érmékből álló láncot alkotnak. (A lánc első és utolsó eleme egy, a többi eleme két láncbeli elemmel szomszédos.) Legkevesebb hány érmét kell a tábláról eltávolítanunk ahhoz, hogy a táblán maradó érmék között ne legyen öt olyan, amelyek rendelkeznek az *A* tulajdonsággal? (A választ indokolni kell.)