

Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny L. esztendő

2011-2012. tanév

11. évfolyam

II. forduló

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet.

$$\frac{13x - x^2}{x + 1} \cdot \left(x + \frac{13 - x}{x + 1} \right) = 42$$

2. Mekkora a legnagyobb szöge annak a háromszögnek, amelynek a és b oldala, valamint a két oldal közös végpontjából kiinduló belső szögfelező háromszögbe eső f_c szakasza között fennáll az $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_c}$ összefüggés?

3. Minden 1-nél nagyobb m pozitív egész esetén jelölje $P(m)$ az m legnagyobb prímosztóját. Mely pozitív egész n számokra teljesül, hogy $P(n) = \sqrt{n}$ és $P(n + 48) = \sqrt{n + 48}$?

4. H a koordináta-rendszerben azoknak a $P(x; y)$ pontoknak a halmaza, amelyekre $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ és $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Mekkora a területe H azon részhalmazának, amely pontjainak koordinátáira

$$\sin^2 x - \sin x \cdot \sin y + \sin^2 y \leq \frac{3}{4}?$$

5. Igazoljuk, hogy bármely háromszöghöz van olyan e egyenes a háromszög síkjában, amelyre teljesül, hogy a háromszög e -re vonatkozó tükörképének és az eredeti háromszögnek a metszete nagyobb területű, mint az eredeti háromszög területének $2/3$ -a.

6. Hány olyan A részhalmaza van a $H = \{1; 2; 3; \dots; 15\}$ halmaznak, amelyre teljesülnek a következő tulajdonságok:

- (1) A -ban nincs két egymást követő H -beli egész;
- (2) ha A -nak k eleme van, akkor nincs k -nál kisebb eleme?