

Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny L. esztendő

2011-2012. tanév

12. évfolyam

II. forduló

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet.

$$\log_3(2^x + 5) = \log_2(3^x - 5)$$

2. A derékszögű koordináta-rendszerben adott két kör:

$$k_1: x^2 + y^2 - 20x + 64 = 0; \quad k_2: x^2 + y^2 + 30x + 144 = 0.$$

Írjuk fel a két kör közös érintői közül annak az egyenletét, amelyre az érintési pontokat összekötő szakasz a legrövidebb. Milyen hosszú ez a legrövidebb közös érintőszakasz?

3. Egy urnában 9 darab egyforma méretű és színű golyó van 1-től 9-ig megszámozva (bármely két golyón levő számok különbözők, és 1-től 9-ig mindegyik egész számhoz tartozik egy golyó). Anna véletlenszerűen kivesz egy golyót az urnából, ennek sorszáma a , majd visszateszi. Ezután Bea is kivesz az urnából egy golyót véletlenszerűen, ennek sorszáma b . Mennyi a valószínűsége annak, hogy $0 < a - 2b + 10$?

4. Az ABC háromszög egyik szöge 45° -os. Mutassuk meg, hogy a zárt ABC háromszöglemez lefedhető két $\frac{AB}{2}$ sugarú zárt körlappal.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha a és b olyan pozitív egész számok, amelyekre $2a^2 + a = 3b^2 + b$, akkor $a - b$ és $2a + 2b + 1$ négyzetszámok.

6. Pozitív egészek egy részhalmaza *ritka*, ha bármely három egymást követő szám közül legfeljebb egyet tartalmaz. Hány *ritka* részhalmaza van az $\{1; 2; 3; \dots; 50\}$ halmaznak?