Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LII. esztendő

2013-2014. tanév

11. évfolyam

I. forduló

1. Határozzuk meg azokat az (a,b) valós számpárokat, amelyekre az alábbi egyenlőség minden valós x értékre fennáll.

$$\cos(ax+b^2)-(a\cdot\cos x+b^2)=1-a$$

2. Egy tetszőleges derékszögű háromszögbe két olyan négyzetet írunk, amelyeknek csúcsai a háromszög oldalain vannak. Ha x-szel jelöljük annak a négyzetnek az oldalát, amelynek egyik oldala az átfogóra illeszkedik, y-nal pedig a másik négyzet oldalát, akkor bizonyítsuk be, hogy

$$1<\frac{y}{x}<1{,}5\,.$$

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán.

$$2^{x^5}+4^{x^4}+256^4=3\cdot16^{x^3}$$

4. Egy háromszög mindhárom oldalegyenesét érintő négy kör sugara egy mértani sorozat négy egymást követő eleme. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge?

5. Tíz csapat körmérkőzést játszik. Mindegyik pár pontosan egyszer mérkőzik, és a mérkőzések nem végződhetnek döntetlenül. Győzelemért 1 pont jár, vereségért 0. Bizonyítsuk be, hogy a csapatok pontszámainak négyzetösszege nem lehet több 285-nél.

6. Legyenek x és y olyan valós számok, amelyekre $0<x<1$ és $x+y=1$. Állapítsa meg a $K=x\cdot\frac{1+x^2}{1+x}+y\cdot\frac{1+y^2}{1+y}$ kifejezés legkisebb értékét, továbbá azt is, hogy a kifejezés az x és y változók mely értékeinél veszi fel ezt az értéket.