HAJNAL IMRE
MATEMATIKA TESZTVERSENY

Feladatsor

I. kategória

BOLYAI
TÁRSULAT

Békés Megyei Tagozata

Békés Megyei Harruckern János
Közoktatási Intézmény

MTA SZAB Békés Megyei Testületének
Matematika Tudományos Műhelye

2012. április 14.

Gyula

1. $\dfrac{2^{2011}\cdot 3^{2013}}{6^{2012}}=$

(A) $\dfrac{1}{6}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{2}{3}$ (E) $\dfrac{3}{2}$

2. Két szám összege *A*. Mindkét számot növeljük meg 3-mal, majd a kapott eredményeket duplázzuk meg. Az így előálló két szám összege:

(A) $2A+3$ (B) $3A+2$ (C) $3A+6$ (D) $2A+6$ (E) $2A+12$

3. Hány olyan pozitív egész *m* szám van, amelyhez létezik legalább egy olyan pozitív egész *n* szám, hogy $m\cdot n\le m+n$ teljesül?

(A) 4 (B) 6 (C) 9 (D) 12 (E) végtelen sok

4. Egy téglalap átlója *a*, egyik oldala kétszer olyan hosszú, mint a másik. Ekkor a téglalap területe

(A) $\dfrac{a^2}{4}$ (B) $\dfrac{2a^2}{5}$ (C) $\dfrac{a^2}{2}$ (D) a^2 (E) $\dfrac{3a^2}{2}$

5. Hány olyan egymást követő pozitív egész számokból álló, legalább kételemű halmaz van, amelyben az elemek összege 15?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

6. A derékszögű koordináta-rendszerben egy 3 meredekségű egyenes egy 5 meredekségű egyenest a (10; 15) pontban metsz. Mekkora a távolsága a két egyenes *x* tengelyre illeszkedő pontjainak?

(A) 2 (B) 5 (C) 7 (D) 12 (E) 20

7. Egy kör köré négyzetet írunk, a négyzet köré kört, a kapott kör köré pedig újra négyzetet. Az eredeti kör és a nagyobb négyzet területének aránya

(A) $\dfrac{\pi}{16}$ (B) $\dfrac{\pi}{8}$ (C) $\dfrac{3\pi}{16}$ (D) $\dfrac{\pi}{4}$ (E) $\dfrac{\pi}{2}$

8. Hány olyan *x* valós szám van, amelyre $\sqrt{120-\sqrt{x}}$ egész szám?

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 10 (E) 11

9. András években mért életkora most *A*. Ez megegyezik három gyermeke jelenlegi életkorának összegével. *B* évvel ezelőtt András életkora kétszerese volt három gyermeke életkora összegének. Ekkor $\dfrac{A}{B}=$

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

10. Ha $-4\le x\le -2$ és $2\le y\le 4$, akkor $\dfrac{x+y}{x}$ legnagyobb értéke

(A) -1 (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\dfrac{1}{2}$ (E) 1

11. Ha $a_1=2$, $a_2=3$ és $a_n=\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$ ($n\ge 3$), akkor $a_{2012}=$

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) 2 (E) 3

12. Egy egyenlőszögű nyolcszög négy oldala 1, négy oldala pedig $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ egység hosszú úgy, hogy nincs két egyenlő hosszúságú szomszédos oldala. Mekkora a nyolcszög területe?

(A) $\dfrac{7}{2}$ (B) $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ (C) $\dfrac{5+4\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{4+5\sqrt{2}}{2}$ (E) 7

13. Az 1, 3, 5, 7, 8 számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával képezzük az összes ötjegyű pozitív egész számot. Mennyi ezen számok átlaga?

(A) 48000 (B) 49999,5 (C) 53332,8 (D) 55555 (E) 56432,8

14. Hány olyan hasonlóság erejéig meghatározott háromszög van, amelyben a belső szögek nagysága fokokban mérve egész szám, és egy nem állandó számtani sorozat három egymást követő eleme?

(A) 10 (B) 30 (C) 59 (D) 60 (E) 89

15. Egy „cinkelt” (nem szabályos) dobókockával dobva az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pont dobásának valószínűsége rendre úgy aránylik egymáshoz, mint 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6. Ezt a kockát kétszer egymás után feldobva mi annak a valószínűsége, hogy a dobott pontok összege 7?

(A) $\frac{4}{63}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{8}{63}$ (D) $\frac{1}{6}$ (E) $\frac{2}{7}$

16. Hány olyan pozitív egész *n* szám van, amelyre 6*n* osztható az $1+2+...+n$ összeggel?

(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 11

17. A valós számok halmazán értelmezett *f* függvény rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

(1) $f(x+y)=x+f(y)$ bármely valós *x*, *y* esetén;

(2) $f(0)=2$.

Ezen feltételek mellett $f(2012)=$

(A) 0 (B) 2 (C) 2010 (D) 2012 (E) 2014

18. Egy derékszögű háromszög átfogójának egy pontján keresztül párhuzamosokat húzunk a befogókkal. Ezek az egyenesek a háromszöget egy négyzetre és két kisebb derékszögű háromszögre bontják. Az egyik kis derékszögű háromszög területe *k*-szorosa a négyzet területének. Mennyi a másik derékszögű háromszög és a négyzet területének aránya?

(A) $\frac{1}{2k+1}$ (B) k (C) $1-k$ (D) $\frac{1}{4k}$ (E) $\frac{1}{8k^2}$

19. Egy egyenesen adottak a $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ pontok az indexezésnek megfelelő sorrendben. Az egyenes egy tetszőleges *P* pontjára legyen $S(P)=PP_1+PP_2+...+PP_7$. $S(P)$ minimális akkor és csak akkor, ha *P*

(A) a P_1P_7 szakasz felezőpontja. (B) a P_2P_6 szakasz felezőpontja.

(C) a P_3P_5 szakasz felezőpontja. (D) azonos P_4-gyel. (E) azonos P_1-gyel.

20. Egy 13 sorból és 17 oszlopból álló táblázatba beírjuk a pozitív egész számokat 1-től 221-ig kétféleképpen. Előbb soronként töltjük meg a táblázatot fentről lefelé, a bal felső sarokból indulva, egy sorban balról jobbra haladva. (Az első sorba az 1, 2, …, 17 számok, a második sorba a 18, 19, …, 34 számok, …, a tizenharmadik sorba a 205, 206, …, 221 számok kerülnek.) Ezután oszloponként töltjük meg a táblázatot balról jobbra, a bal felső sarokból indulva, egy oszlopban fentről lefelé haladva. (Az első oszlopba rendre az 1, 2, …, 13 számok, a második oszlopba a 14, 15, …, 26 számok kerülnek, és így tovább.) Mennyi azoknak a számoknak az összege, amelyek mindkét feltöltés esetén ugyanabba a mezőbe kerülnek?

(A) 222 (B) 333 (C) 444 (D) 555 (E) 666

21. Az *ABC* háromszög *BC* oldalára illeszkedik a *D* pont, *AC* oldalára illeszkedik az *E* pont, az *AD* és *BE* szakaszok metszéspontja pedig *P*. Tudjuk, hogy az *ABP* és *BDP* háromszögek területe 7 területegység, az *APE* háromszög területe pedig 3 területegység. Mekkora az *EPDC* négyszög területe?

(A) 15 (B) 17 (C) $\frac{35}{2}$ (D) 18 (E) $\frac{55}{3}$

22. Az *a* tízes számrendszerben kétjegyű pozitív egész szám jegyeinek felcserélésével kapott szám *b*. Ha $a^2-b^2=k^2$ valamely pozitív egész *k*-ra, akkor $a+b+k=$

(A) 88 (B) 112 (C) 116 (D) 144 (E) 154

23. Ha $a+a^{-1}=4$, akkor $a^4+a^{-4}=$

(A) 164 (B) 172 (C) 192 (D) 194 (E) 212

24. Egy 5-ször 5-ös sakktábla 25 mezőjéből hányféleképpen választható ki 3 mező úgy, hogy a kiválasztott mezők közül semelyik kettő ne legyen egy sorban, illetve egy oszlopban?

(A) 100 (B) 125 (C) 600 (D) 2300 (E) 3600

25. Egy téglatest élhosszainak összege 140, testátlójának hossza 21. Mekkora a téglatest felszíne?

(A) 776 (B) 784 (C) 798 (D) 800 (E) 812

26. Az alábbi táblázat minden sorában és minden oszlopában ugyanannyi, a számok összege. Legalább hány számot kell megváltoztatni, hogy ez a hat összeg páronként különböző legyen?

4	9	2
8	1	6
3	5	7

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

27. Hány olyan pozitív egészekből álló (m; n) számpár van, amelyekre teljesül, hogy m és n relatív prímek, valamint $\frac{m}{n}+\frac{14n}{9m}$ egész szám?

(A) 4 (B) 6 (C) 9 (D) 12 (E) végtelen sok

28. Egy számháromszög részlete látható alább, az elsőtől az ötödik soráig.

0
1 1
2 2 2
3 4 4 3
4 7 8 7 4

A háromszög két szárán a természetes számok sorozata található, a belső számok pedig az előző sorban található két közvetlen szomszéd összegeként adódnak. Jelölje $f(n)$ az n-edik sorban levő számok összegét (pl. $f(1)=0$, $f(2)=2$). Mennyi a maradék, ha $f(100)$-at 100-zal osztjuk?

(A) 12 (B) 30 (C) 50 (D) 62 (E) 74

29. Az asztalon három számkártya fekszik egymás mellett lefordítva, mindegyiken egy pozitív egész szám található. Anna, Bea és Cili a következőket tudják a kártyán levő számokról: (1) páronként különbözők; (2) összegük 13; (3) balról jobbra növekvő sorrendben vannak az asztalon. Anna megfordítja a bal oldali kártyát és ezt mondja: „Nincs elég információm, hogy kitaláljam a másik két kártyán levő számokat.” Bea megfordítja a jobb oldali kártyát és ezt mondja: „Nincs elég információm, hogy kitaláljam a másik két kártyán levő számokat.” Cili megfordítja a középső kártyát és kijelenti: „Nincs elég információm, hogy kitaláljam a másik két kártyán levő számokat.” A lányok hallják egymás megjegyzéseit, és tudják egymásról, hogy okosak, állításaik megalapozottak. Melyik szám van a középső kártyán?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) Nincs elég információ a középső szám meghatározásához.

30. Egy körvonalon adott öt pont. Véletlenszerűen kiválasztunk négyet a pontok által meghatározott húrok közül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott négy húr egy konvex négyszöget zár közre?

(A) $\frac{1}{210}$ (B) $\frac{1}{105}$ (C) $\frac{1}{42}$ (D) $\frac{1}{15}$ (E) $\frac{1}{14}$

Megoldások: EEEBC ABEDD EACCC BEDDD DEDCB DAECC

A feladatsort összeállította: dr. Kosztolányi József egyetemi docens, Szegedi Tudományegyetem