Egyenletek megoldása egyenlőtlenségekkel

Dr. Németh József
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Analízis Tanszék

Gyula; HIMT
2013. április 13.

http://www.math.u-szeged.hu/~nemethj

$$\left.\begin{array}{ll}\text{a)} & \sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2} \;(" = " \Leftrightarrow a = b) \\[2ex] \text{b)} & \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \le \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \;(a_n \ge 0;\; " = " \ldots)\end{array}\right\} \textbf{Cauchy}$$

1/a)

0) $2^x + 3^x = 2 \uparrow x = 0$

00) $2^x + 3^x = 2 \cdot 4^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^x + \left(\dfrac{3}{4}\right)^x = 2 \downarrow x = 0$

1/b) **Oldjuk meg:**

$(*)\; 4^{x^2} + 16^{x^2} = 2 \cdot 7^{x^2}$

Előző trükkök nem jók.

Mo.: $x = 0$ Van-e több?

$$\frac{4^{x^2} + 16^{x^2}}{2} \ge \sqrt{64^{x^2}} = 8^{x^2}$$

$$(*) \Rightarrow \frac{4^{x^2} + 16^{x^2}}{2} = 7^{x^2}$$

Tehát $7^{x^2} \ge 8^{x^2}$ kell $\Leftrightarrow x = 0$

2. $2\cos 2\pi x = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

Mo.: Segítség $a + \dfrac{1}{a} \ge 2$, ha $a > 0$.

$$" = " \Leftrightarrow a = 1.$$

Tehát $2\cos 2\pi x \ge 2 \Leftrightarrow \cos 2\pi x \ge 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

Így mo.: $x_1 = 1,\; x_2 = -1$.

3. $\sin\frac{\pi}{2}x = \log_2(x^2+1) - \log_2 x$

Mo.: $\sin\frac{\pi}{2}x = \log_2\frac{x^2+1}{x} = \log_2\left(x+\frac{1}{x}\right) \overset{(*)}{\geq} \log_2 2 = 1$ ($x > 0$ triviális)

Tehát $\sin\frac{\pi}{2}x \geq 1 \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{2}x = 1 \Leftrightarrow x = 4k+1;\ k \in \mathbb{Z}$, de $x = 1$ esetén van " $=$ " $(*)$ esetén.

Így mo.: $x = 1$

4. $\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x-x^2+1} = x^2 - x + 2$ $(*)$

Mo.:

$$\sqrt{x^2+x-1} = \sqrt{(x^2+x-1)\cdot 1} \leq \frac{x^2+x-1+1}{2} = \frac{x^2+x}{2}$$

$$\sqrt{x-x^2+1} = \sqrt{(x-x^2+1)\cdot 1} \leq \frac{x-x^2+2}{2}$$

Így $\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x-x^2+1} \leq \frac{x^2+x}{2} + \frac{x-x^2+2}{2} = x + 1$ $(**)$

Tehát $(*) \wedge (**) \Rightarrow$

$$x^2 - x + 2 \leq x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 0$$

Így a mo.: $x = 1$

5. $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$ $(*)$

Mo.:

$$\sqrt{(x-2)\cdot 1} \leq \frac{x-2+1}{2} = \frac{x-1}{2}$$

$$\sqrt{4-x\cdot 1} \leq \frac{4-x+1}{2} = \frac{5-x}{2}.$$

Így

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x} \leq \frac{x-1}{2}+\frac{5-x}{2},$$

azaz

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x} \leq 2$$

Tehát $(*)$ miatt

$$x^2-6x+11 \leq 2 \quad (**)$$

De $x^2-6x+11 = x^2-6x+9+2 = (x-3)^2+2 \leq 2$. Alk. $(**)$-ot, csak "=" lehet, akkor $x=3$.
Ellenőrzés szükséges.
Mo.: $x=3$.
6. Oldjuk meg az egész számok körében:

$$2x^4+2y^4 = 4xy-1 \quad (*)$$

Mo.: $2x^4+2y^4 \geq 2\sqrt{2x^4 \cdot 2y^4} = 4 \cdot x^2y^2$
Így $(*)$-ot figyelembe véve:

$$4xy-1 \geq 4x^2y^2 \Leftrightarrow (2xy-1)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow 2xy-1=0 \Leftrightarrow 2xy=1 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2x}$$

Behelyettesítve:

$$2x^4+\frac{1}{8x^4}=1. \qquad \text{Jel} \quad z=x^4$$

$$\Rightarrow 2z+\frac{1}{8z}=1 \Leftrightarrow (4z-1)^2=0 \Leftrightarrow z=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Tehát egész megoldás nincs.

7. $\log_x(x+1) = \log_{x+1}(x+2);\; 1 \neq x > 0$

Mo.: Átírás: $\dfrac{\lg(x+1)}{\lg x} = \dfrac{\lg(x+2)}{\lg(x+1)} \quad (*)$

Ebből látszik: $0 < x < 1$ nem lehet (b.o. nevezője). Tehát $x > 1$-re elég szorítkozni.
$(*)$-ból:

$$\lg^2(x+1) = (\lg x) \cdot \lg(x+2)$$

$$\lg^2(x+1) \overset{?}{>} \left[\frac{\lg x(x+2)}{2}\right]^2 = \left[\frac{\lg x + \lg(x+2)}{2}\right]^2 > (\lg x) \cdot \lg(x+2)$$

$$\text{“?”} \qquad \lg^2(x+1) > \left[\frac{\lg x(x+2)}{2}\right]^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\lg(x+1)^2 > \lg x(x+2)$$

$$x^2 + 2x + 1 > x^2 + 2x.$$

Így nincs megoldás!

Mellékeredmény: $\log_x(x+1) \downarrow$

Pl.: $\log_{10001} 10002 > \log_{10002} 10003$

8. $\sqrt[3]{25x(2x^2+9)} = 4x + \dfrac{3}{x},\; (x \neq 0).$

Mo.: A C-egyenl. csak nem-negatív értékekre igaz, de a b.o. és a j.o. páratlan, így elég $x > 0$-ra megoldani.

Ezek után:

$$x\sqrt[3]{25x(2x^2+9)} = 4x^2+3 \Rightarrow$$
$$\sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)} = 4x^2+3 \qquad (*)$$

Most alk. C-t: $(n=3)$

$$\sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)} = \sqrt[3]{5x^2\cdot 5x^2(2x^2+9)} \overset{\text{“}C\text{”}}{\leq}$$
$$\leq \frac{5x^2+5x^2+2x^2+9}{3} = \frac{12x^2+9}{3} = 4x^2+3.$$

Azaz $(*)$ bal oldala $\leq 4x^2+3$.

Mikor van ”=”?

$\Leftrightarrow 5x^2 = 5x^2 = 2x^2+9 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$

A megoldás: $x = \pm\sqrt{3}$. (Páratlan!!)

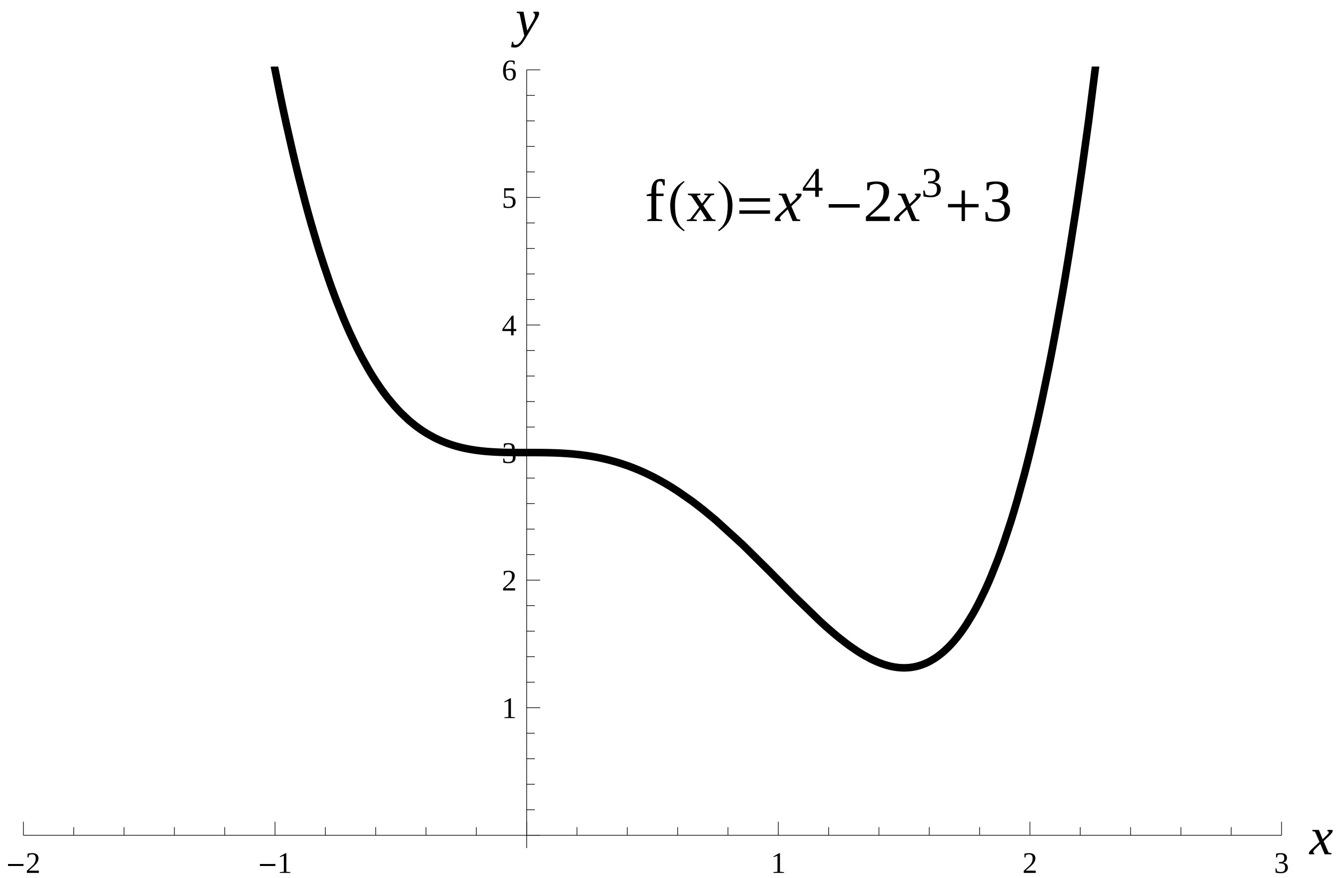
9. Oldja meg!

   $x^3y = 9 \qquad (*)$

   $3x + y = 6 \quad (**)$

   $x, y \geq 0$

Mo.: *Helyettesítés*: $x^3(6-3x) = 9 \Leftrightarrow -3x^4+6x^3-9=0 \Leftrightarrow$ $x^4-2x^3+3=0$



Írjuk át $(*)$-ot:

$$\sqrt[4]{x^3y} = \sqrt[4]{9}.$$

Majd alk. C-t $n = 4$-re:

$$\sqrt[4]{xxxy} \leq \frac{x+x+x+y}{4} = \frac{3x+y}{4} \overset{(**)}{=} \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Mivel $\sqrt[4]{x^3y} = \sqrt[4]{9}$, ezért

$$\sqrt[4]{9} \leq \frac{3}{2}$$

kell, ami nem áll, tehát nincs megoldás.
Megj.: Oldjuk fel $x > 0, y > 0$-t:

a) csak $x < 0, y < 0$ lehet $(*)$ miatt, de akkor meg $(**)$ nem állhat fenn.

Tehát az egyenletrendszernek nincs megoldása a valós (x, y) számpárok körében. (Az ábra is ezt sugallja.)

Appendix

$$A_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} = G_n,$$

Bernoulli-egyenlőtlenség: $(1+x)^n \geq 1 + nx$ $(x \geq -1, n \in \mathbb{N})$.

Bizonyítás: Tudjuk: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$.

Legyen $1 + x = a, b = 1$. Így

$$(1+x)^n - 1 = x((1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2} + \ldots + 1).$$

α) Ha $x \geq 0$, akkor $(1+x)^k \geq 1$ és így

$$(1+x)^n - 1 \geq n \cdot x \Longleftrightarrow (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

β) Ha $-1 \leq x < 0$, akkor $(1+x)^k \leq 1$ és így

$$(1+x)^n - 1 \geq n \cdot x \Longleftrightarrow (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Most $A_n \geq G_n$ bizonyítása. (Legyen $G_1 \stackrel{\text{def}}{=} a_1$ és $G_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$.)

$$\left(\frac{G_n}{G_{n-1}}\right)^n = \left(1 + \underbrace{\frac{G_n}{G_{n-1}} - 1}_{x}\right)^n \stackrel{B}{\geq} \qquad (*)$$

$$\stackrel{B}{\geq} 1 + n\left(\frac{G_n}{G_{n-1}} - 1\right)$$

Másrészt:

$$\left(\frac{G_n}{G_{n-1}}\right)^n = \frac{a_1 \ldots a_n}{G_{n-1}^{n-1} \cdot G_{n-1}} = \qquad (**)$$
$$= \frac{a_1 \ldots a_n}{a_1 \ldots a_{n-1} \cdot G_{n-1}} = \frac{a_n}{G_{n-1}}$$

Így $(*), (**) \Rightarrow$

$$\frac{a_n}{G_{n-1}} \geq 1 + n\left(\frac{G_n}{G_{n-1}} - 1\right) / \cdot G_{n-1}$$
$$a_n \geq G_{n-1} + n \cdot G_n - n \cdot G_{n-1}, \text{ azaz}$$
$$a_n \geq n \cdot G_n - (n-1)G_{n-1}.$$

Rendre

$$\begin{array}{r} a_1 \geq 1 \cdot G_1 - 0 \cdot 1 \\ a_2 \geq 2 \cdot G_2 - 1 \cdot G_1 \\ a_3 \geq 3 \cdot G_3 - 2 \cdot G_2 \\ \vdots \\ a_n \geq n \cdot G_n - (n-1)G_{n-1} \\ \hline a_1 + \ldots + a_n \geq n \cdot G_n \Rightarrow A_n \geq G_n. \end{array}$$

"$=$"?

Descartes (1596-1650)
1637-ben
Tétel (Descartes-szabály).
Az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ polinom pozitív gyökeinek száma nem nagyobb, mint az $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ sorozatban az *elő-jelváltások* száma - és attól páros számban tér el.

Pl.:

$x^2 - 1 = P(x)$	$(-1; 0; 1)$	El.v.sz. 1 Poz.gy.: 1
$(x-1)^2 = P(x) = x^2 - 2x + 1$	$(1; -2; 1)$	El.v.sz. 2 Poz.gy.: 2 (multipl.)
$x(x-1)(x-2)(x-3) =$ $= P(x) =$ $= x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$	$(0; -6; 11; -6; 1)$	El.v.sz. 3 Poz.gy.: 3
$x^5 + 2x^4 + 3x^2 - x - 1 = P(x)$	$(-1; -1; 3; 2; 1)$	El.v.sz. 1 Poz.gy.: 1
$-x^2 + x - 1 = P(x)$	$(-1; 1; -1)$	El.v.sz. 2 Poz.gy.: 0

$\Rightarrow$ A) $$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

B) $$\sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$ **Négyzetes**

C) **C–B–S** $$\left|\sum_1^n a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_1^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_1^n b_i^2}$$

D) **Hölder** $$\left|\sum_1^n a_i b_i\right| \leq \left\{\sum a_i^p\right\}^{1/p} \left\{\sum b_i^q\right\}^{1/q}; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$\vdots$