

Hogyan óvjuk meg értékes festményeinket?

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, SZTE, Szeged

2013. április

Feladat

Adott egy konvex nyolcszög.

Feladat

Adott egy konvex nyolcszög.

Csúcsai közül $\binom{8}{3} = 56$ -féleképpen választható ki három.

Feladat

Adott egy konvex nyolcszög.

Csúcsai közül $\binom{8}{3} = 56$ -féleképpen választható ki három.
Mindegyik kiválasztás egy-egy háromszöghöz vezet.

Feladat

Adott egy konvex nyolcszög.

Csúcsai közül $\binom{8}{3} = 56$ -féleképpen választható ki három.
Mindegyik kiválasztás egy-egy háromszöghöz vezet.

Helyezzünk el pontokat a síkon úgy, hogy mind a 56 fenti
háromszög belsejébe essen kiválasztott pont.

Feladat

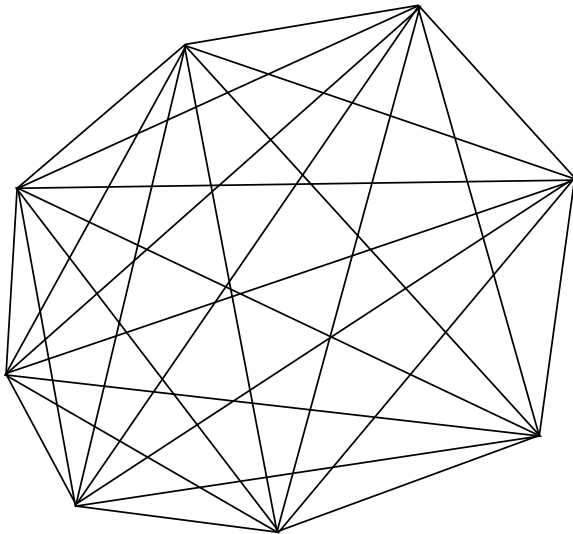
Adott egy konvex nyolcszög.

Csúcsai közül $\binom{8}{3} = 56$ -féleképpen választható ki három.
Mindegyik kiválasztás egy-egy háromszöghöz vezet.

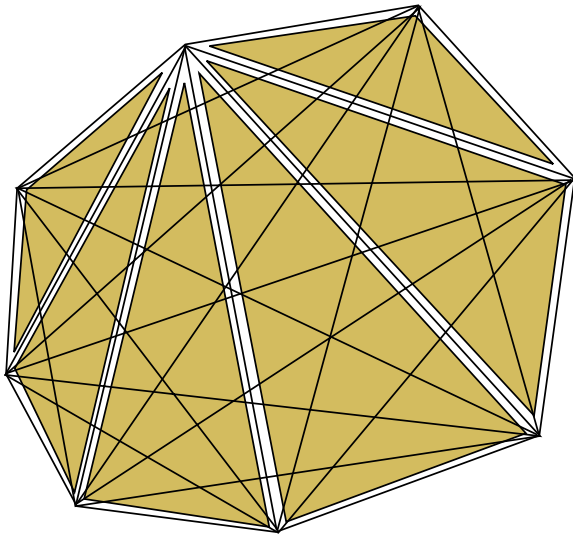
Helyezzünk el pontokat a síkon úgy, hogy mind a 56 fenti
háromszög belsejébe essen kiválasztott pont.

Legalább hány pontra van szükségünk?

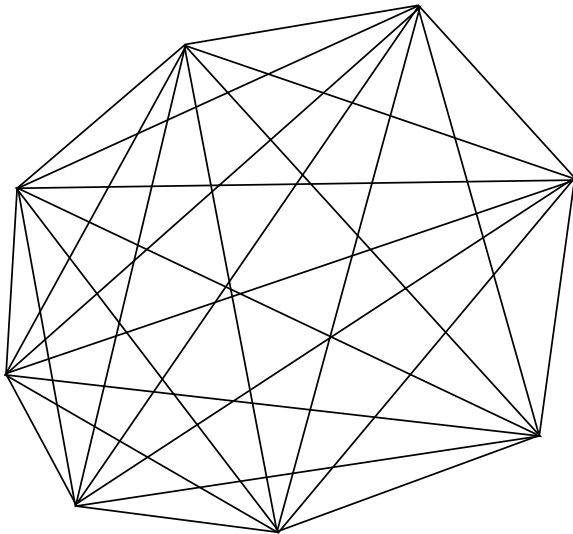
A megoldás: alsó becslés



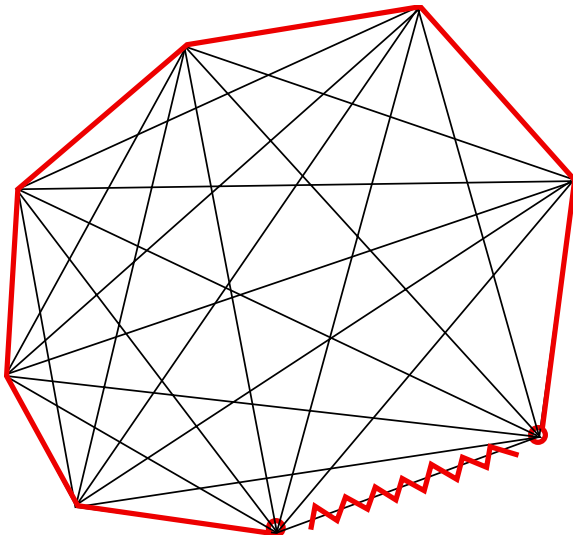
A megoldás: alsó becslés



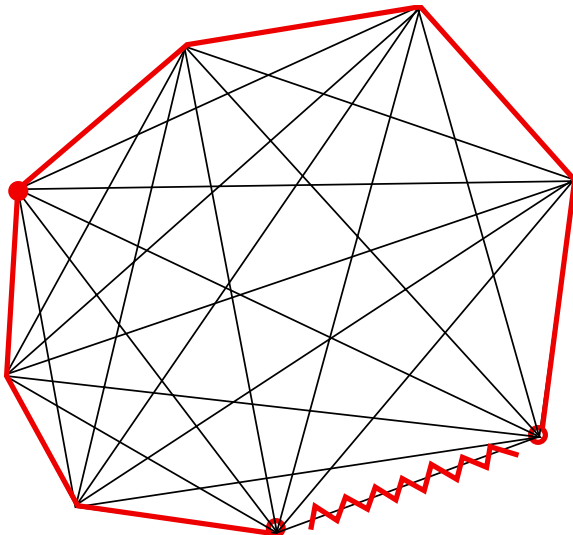
A megoldás: felső becslés



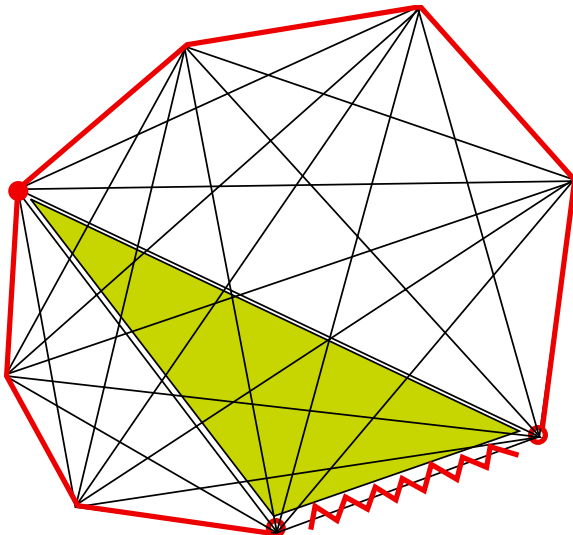
A megoldás: felső becslés



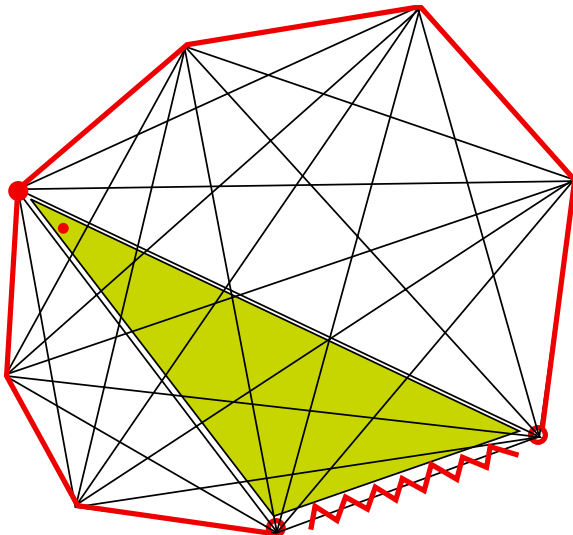
A megoldás: felső becslés



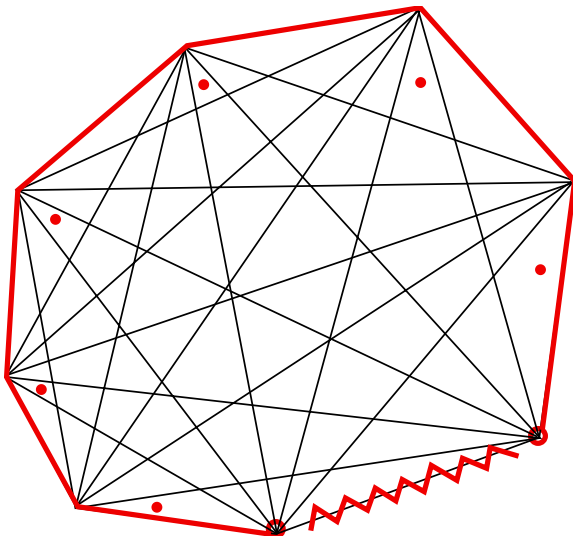
A megoldás: felső becslés



A megoldás: felső becslés



A megoldás: felső becslés



Ha háromszögek egy rendszere olyan, hogy

Ha háromszögek egy rendszere olyan, hogy

BELSEJEIK PÁRONKÉNT DISZJUNKTAK

akkor

Ha háromszögek egy rendszere olyan, hogy

BELSEJEIK PÁRONKÉNT DISZJUNKTAK

akkor

KÜLÖNBÖZŐ PONTOKAT IGÉNYELNEK.

Ha háromszögek egy rendszere olyan, hogy

BELSEJEIK PÁRONKÉNT DISZJUNKTAK

akkor

KÜLÖNBÖZŐ PONTOKAT IGÉNYELNEK.

Észrevétel

Ha találunk legalább k páronként diszjunkt háromszöget, akkor legalább k pont kell a megoldáshoz.

1. kérdés

Mi van ha konvex hatszög helyett konvex n -szöggel dolgozunk?

1. kérdés

Mi van ha konvex hatszög helyett konvex n -szöggel dolgozunk?

Semmi baj. Ugyanezek az ötletek megoldják a feladatot.

1. kérdés

Mi van ha konvex hatszög helyett konvex n -szöggel dolgozunk?

Semmi baj. Ugyanezek az ötletek megoldják a feladatot.

2. kérdés

Mi van ha n általános helyzetű ponttal dolgozunk?

1. kérdés

Mi van ha konvex hatszög helyett konvex n -szöggel dolgozunk?

Semmi baj. Ugyanezek az ötletek megoldják a feladatot.

2. kérdés

Mi van ha n általános helyzetű ponttal dolgozunk?

Nehezebb a kérdés. De OKOS diákjaink még mindig megoldják.

1. kérdés

Mi van ha konvex hatszög helyett konvex n -szöggel dolgozunk?

Semmi baj. Ugyanezek az ötletek megoldják a feladatot.

2. kérdés

Mi van ha n általános helyzetű ponttal dolgozunk?

Nehezebb a kérdés. De OKOS diákjaink még mindig megoldják. 1991. évi Kürschák József matematikai tanulmányverseny egyik (legnehezebb) feladata.

Feladat

Egy pince egyenes szakaszokból álló folyosók rendszere. A folyosó szakaszok egy konvex n -szög oldalai és átlói.

Feladat

Egy pince egyenes szakaszokból álló folyosók rendszere. A folyosó szakaszok egy konvex n -szög oldalai és átlói. ($\binom{n}{2}$ folyosónk van.)

Feladat

Egy pince egyenes szakaszokból álló folyosók rendszere. A folyosó szakaszok egy konvex n -szög oldalai és átlói. ($\binom{n}{2}$ folyosónk van.)

A pince egy pontján elhelyezett fáklya pontosan azokat a folyosókat világítja meg, ami áthalad rajta.

Feladat

Egy pince egyenes szakaszokból álló folyosók rendszere. A folyosó szakaszok egy konvex n -szög oldalai és átlói. ($\binom{n}{2}$ folyosónk van.)

A pince egy pontján elhelyezett fáklya pontosan azokat a folyosókat világítja meg, ami áthalad rajta.

Legalább hány fáklyára van szükségünk az összes folyosó megvilágításához?

Feladat

Egy pince egyenes szakaszokból álló folyosók rendszere. A folyosó szakaszok egy konvex n -szög oldalai és átlói. ($\binom{n}{2}$ folyosónk van.)

A pince egy pontján elhelyezett fáklya pontosan azokat a folyosókat világítja meg, ami áthalad rajta.

Legalább hány fáklyára van szükségünk az összes folyosó megvilágításához?

Első ötlet:

Feladat

Egy pince egyenes szakaszokból álló folyosók rendszere. A folyosó szakaszok egy konvex n -szög oldalai és átlói. ($\binom{n}{2}$ folyosónk van.)

A pince egy pontján elhelyezett fáklya pontosan azokat a folyosókat világítja meg, ami áthalad rajta.

Legalább hány fáklyára van szükségünk az összes folyosó megvilágításához?

Első ötlet:

n fáklya elég.

Feladat

Egy pince egyenes szakaszokból álló folyosók rendszere. A folyosó szakaszok egy konvex n -szög oldalai és átlói. ($\binom{n}{2}$ folyosónk van.)

A pince egy pontján elhelyezett fáklya pontosan azokat a folyosókat világítja meg, ami áthalad rajta.

Legalább hány fáklyára van szükségünk az összes folyosó megvilágításához?

Első ötlet:

n fáklya elég.

Második ötlet:

Feladat

Egy pince egyenes szakaszokból álló folyosók rendszere. A folyosó szakaszok egy konvex n -szög oldalai és átlói. ($\binom{n}{2}$ folyosónk van.)

A pince egy pontján elhelyezett fáklya pontosan azokat a folyosókat világítja meg, ami áthalad rajta.

Legalább hány fáklyára van szükségünk az összes folyosó megvilágításához?

Első ötlet:

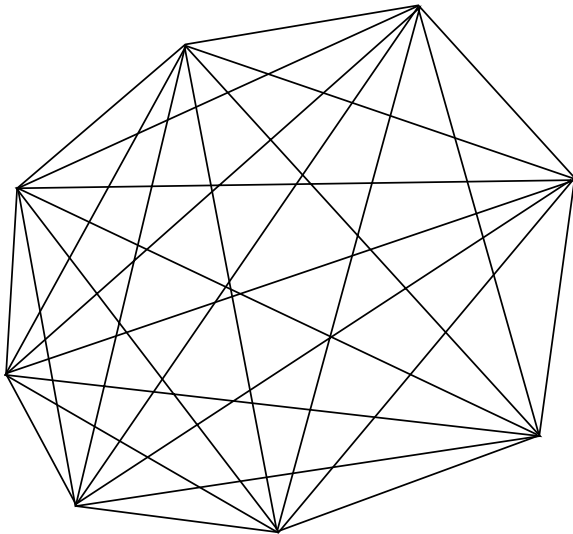
n fáklya elég.

Második ötlet:

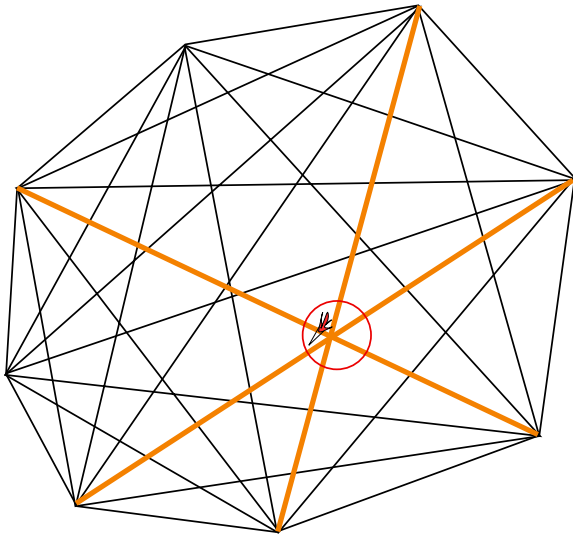
$n - 1$ fáklya elég.

A feladat ábrán

A feladat ábrán



A feladat ábrán



A korábbi ötlet nem működik

Közös pont nélküli két folyosó \equiv Külön fáklyát igénylő két folyosó.

Közös pont nélküli két folyosó \equiv Külön fáklyát igénylő két folyosó.

Kérdés

Hány páronként közös pont nélküli folyosót tudok kijelölni?

Közös pont nélküli két folyosó \equiv Külön fáklyát igénylő két folyosó.

Kérdés

Hány páronként közös pont nélküli folyosót tudok kijelölni?

A válasz:

Közös pont nélküli két folyosó \equiv Külön fáklyát igénylő két folyosó.

Kérdés

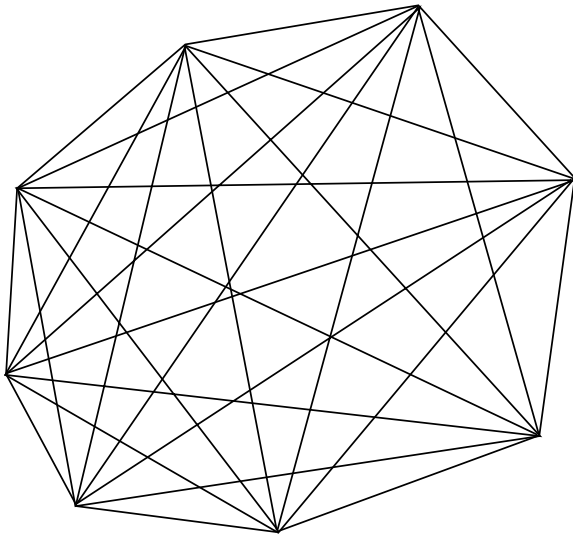
Hány páronként közös pont nélküli folyosót tudok kijelölni?

A válasz:

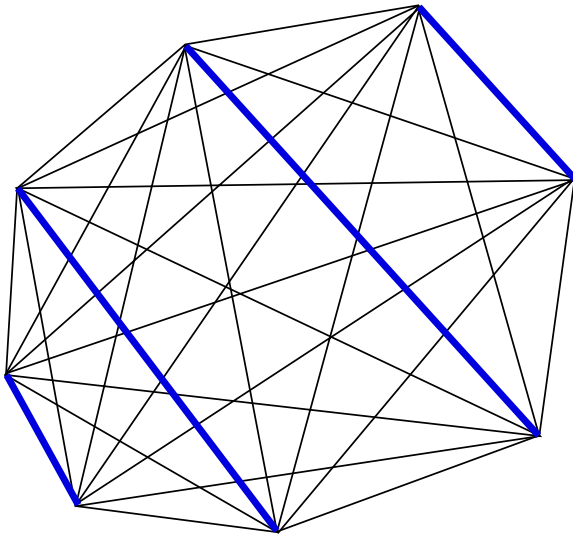
$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Az ötlet ábrán

Az ötlet ábrán



Az ötlet ábrán



Feltehető, hogy az egyik csúcsban (A) nincs fáklya.

A korábbi ötlet működik

Feltehető, hogy az egyik csúcsban (A) nincs fáklya.

Vegyük az A -ban összefutó folyosókat. ($n - 1$ darab.)

A korábbi ötlet működik

Feltehető, hogy az egyik csúcsban (A) nincs fáklya.

Vegyük az A -ban összefutó folyosókat. ($n - 1$ darab.)

Bármely kettőnek egyetlen közös pontja van: A .

A korábbi ötlet működik

Feltehető, hogy az egyik csúcsban (A) nincs fáklya.

Vegyük az A -ban összefutó folyosókat. ($n - 1$ darab.)

Bármely kettőnek egyetlen közös pontja van: A .

Ha A -ban nincs fáklya, akkor

A korábbi ötlet működik

Feltehető, hogy az egyik csúcsban (A) nincs fáklya.

Vegyük az A -ban összefutó folyosókat. ($n - 1$ darab.)

Bármely kettőnek egyetlen közös pontja van: A .

Ha A -ban nincs fáklya, akkor EZ AZ $n - 1$ FOLYOSÓ
MINDEGYIKE KÜLÖN FÁKLYÁT IGÉNYEL.

A korábbi ötlet működik

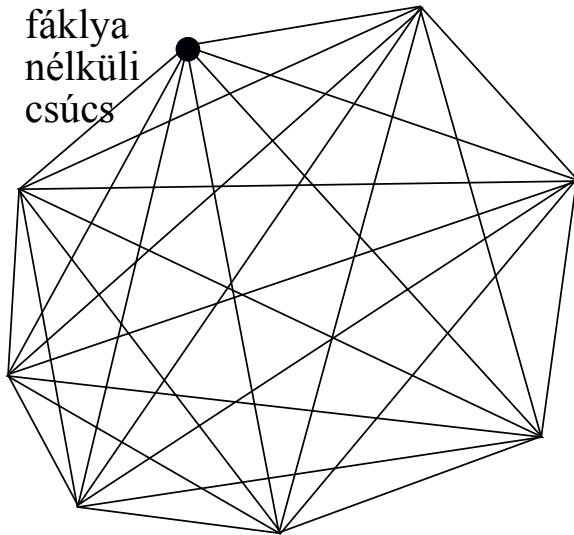
Feltehető, hogy az egyik csúcsban (A) nincs fáklya.

Vegyük az A -ban összefutó folyosókat. ($n - 1$ darab.)

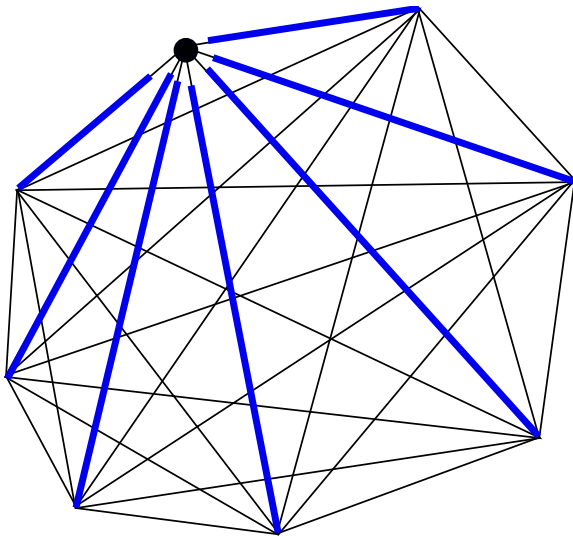
Bármely kettőnek egyetlen közös pontja van: A .

Ha A -ban nincs fáklya, akkor EZ AZ $n - 1$ FOLYOSÓ
MINDEGYIKE KÜLÖN FÁKLYÁT IGÉNYEL.

A feladat megoldása: $n - 1$ fáklya kell, de elég is.



A megoldás ábrán



Lássuk a festményeket!

Lássuk a festményeket!

Menjünk el egy képtárba.

Lássuk a festményeket!

Menjünk el egy képtárba.



Lássuk a festményeket!

Menjünk el egy képtárba.



Lássuk a festményeket!

Menjünk el egy képtárba.



Lássuk a festményeket!

Menjünk el egy képtárba.



Hogyan védjük meg az értékes festményeket?

Hogyan védjük meg az értékes festményeket?

Egyszerű:

Hogyan védjük meg az értékes festményeket?

Egyszerű: Fogadjuk fel öröket. Helyezzük el őket sűrűen.

Hogyan védjük meg az értékes festményeket?

Egyszerű: Fogadjuk fel öröket. Helyezzük el őket sűrűen.

Mégsem olyan egyszerű.

Hogyan védjük meg az értékes festményeket?

Egyszerű: Fogadjuk fel öröket. Helyezzük el őket sűrűen.

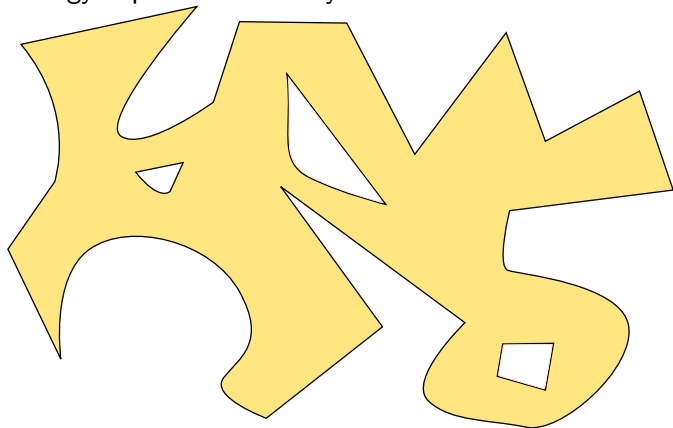
Mégsem olyan egyszerű. Tudja valaki mennyibe kerül egy megbízható ör?

Mi az hogy sűrűen?

Legyen G egy képtár:

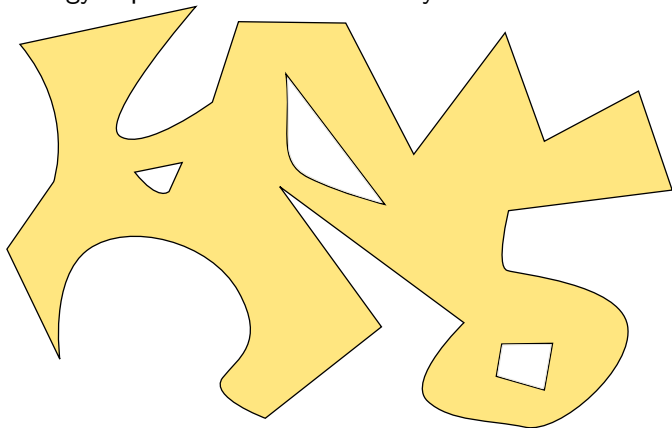
Mi az hogy sűrűen?

Legyen G egy képtár: tartomány



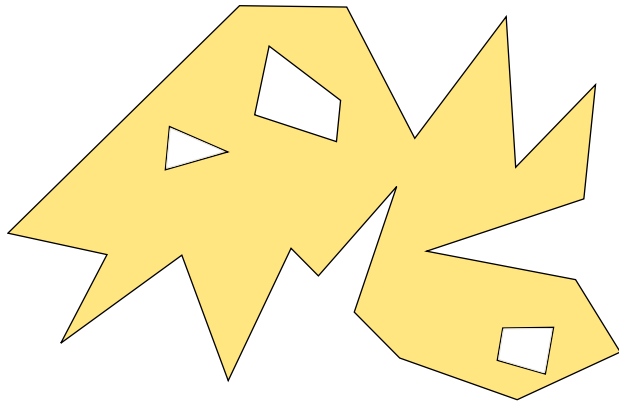
Mi az hogy sűrűen?

Legyen G egy képtár: síkbeli tartomány



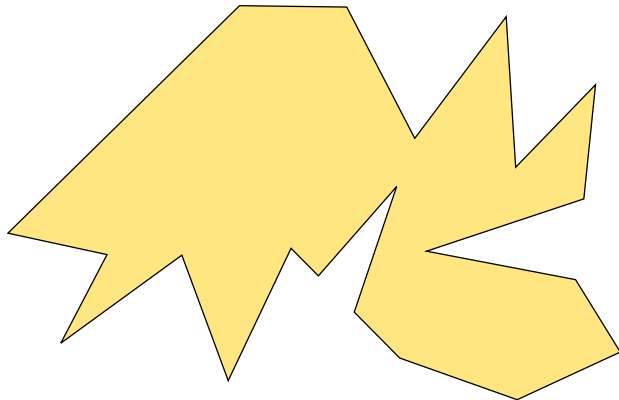
Mi az hogy sűrűen?

Legyen G egy képtár: sokszög



Mi az hogy sűrűen?

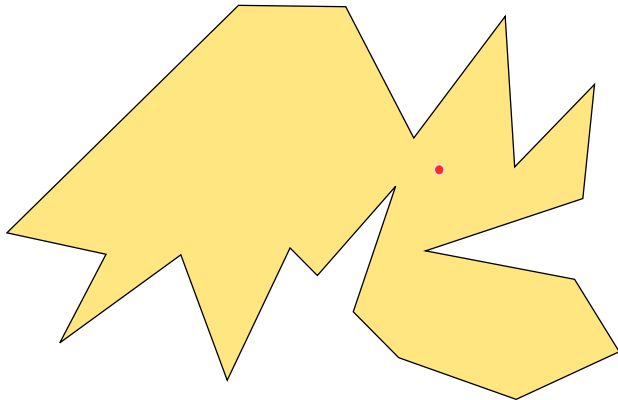
Legyen G egy képtár: egyszerű sokszög.



Mi az hogy sűrűen?

Legyen G egy képtár: egyszerű sokszög.

Legyen O egy pontja (az űr).

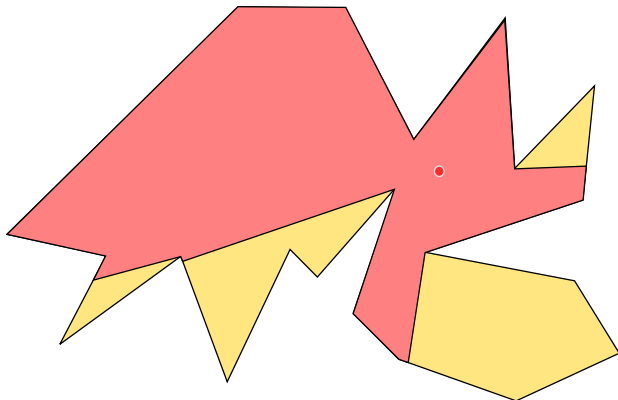


Mi az hogy sűrűen?

Legyen G egy képtár: egyszerű sokszög.

Legyen O egy pontja (az űr).

Amit LÁT O , azt őrzi.

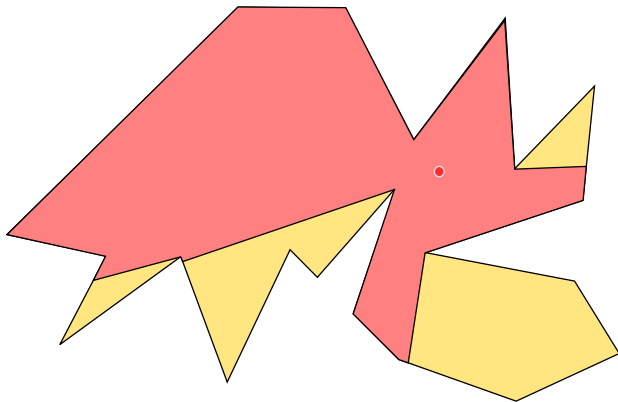


Mi az hogy sűrűen?

Legyen G egy képtár: egyszerű sokszög.

Legyen O egy pontja (az őr).

Amit LÁT O , azt őrzi.



Sűrű = Az őrök által látott területek fedjék le a képtárat.

Minimum hány őr kell egy képtár őrzésére?

Minimum hány őr kell egy képtár őrzésére?

Természetes érzés: Bonyolultabb, nagyobb képtár, több őr.

Minimum hány ór kell egy képtár őrzésére?

Természetes érzés: Bonyolultabb, nagyobb képtár, több ór.

Minimum hány ór kell egy N oldalú képtár őrzésére?

Definíció

Legyen E egy egyszerű sokszög.

Definíció

Legyen E egy egyszerű sokszög.

$$\text{guard}(E) = \min\{k : k \text{ örrel őrizhetjük } E\text{-t}\}$$

Definíció

Legyen E egy egyszerű sokszög.

$$\text{guard}(E) = \min\{k : k \text{ örrel őrizhetjük } E\text{-t}\}$$

Definíció

$$\text{guard}(N) = \min\{\text{guard}(E) : E \text{ egy egyszerű } N\text{-szög}\}.$$

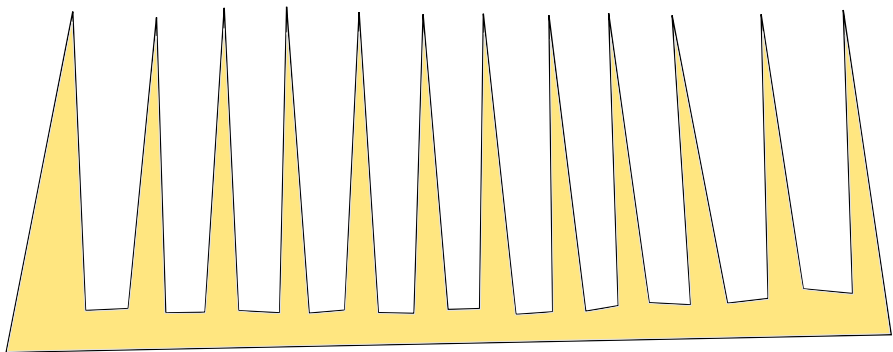
Mi az, hogy alsó becslés?

Mi az, hogy alsó becslés?

Legegyszerűbb mód: Egy konkrét "nehéz" képtár felrajzolása.

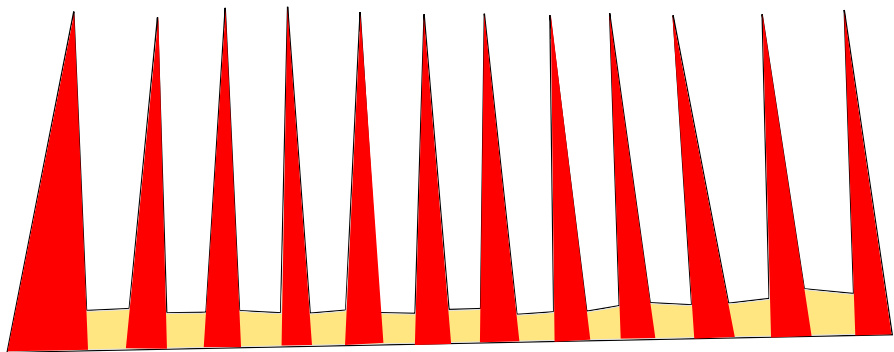
Mi az, hogy alsó becslés?

Legegyszerűbb mód: Egy konkrét "nehéz" képtár felrajzolása.



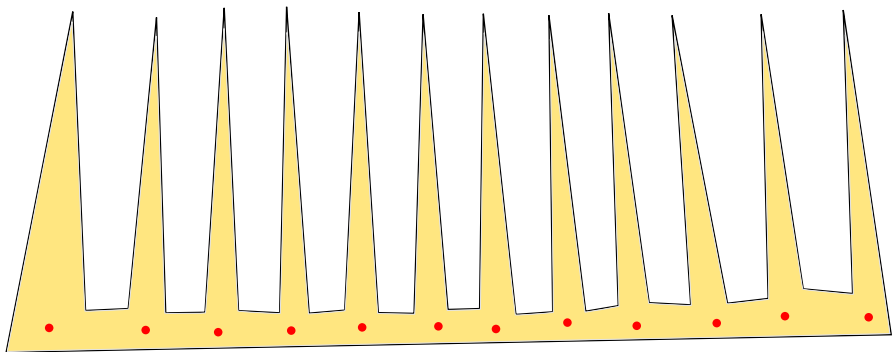
Mi az, hogy alsó becslés?

Legegyszerűbb mód: Egy konkrét "nehéz" képtár felrajzolása.



Mi az, hogy alsó becslés?

Legegyszerűbb mód: Egy konkrét "nehéz" képtár felrajzolása.



Az alsó becslés

Alsó becslés

$$\mathit{guard}(N) \geq \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor.$$

Minden N oldalú sokszöghöz megfelelő számú őrt kell biztosítanunk.

Minden N oldalú sokszöghöz megfelelő számú őrt kell biztosítanunk.

Észrevétel

Ha minden csúcsba őrt rakunk, akkor rendben vagyunk.

Minden N oldalú sokszöghöz megfelelő számú őrt kell biztosítanunk.

Észrevétel

Ha minden csúcsba őrt rakunk, akkor rendben vagyunk.

Felső becslés

$$\text{guard}(N) \leq N.$$

Háromszögelések

Tétel

Minden egyszerű sokszög egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontható.

Tétel

Minden egyszerű sokszög egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontható.

Tétel⁺

Egy N oldalú egyszerű sokszöget egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontunk.

Tétel

Minden egyszerű sokszög egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontható.

Tétel⁺

Egy N oldalú egyszerű sokszöget egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontunk.

Minden esetben ugyanannyi háromszögünk lesz, $N - 2$.

FŐLEMMA

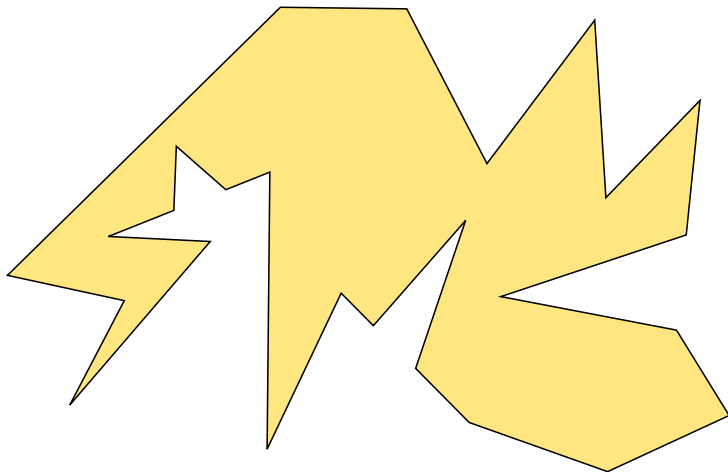
Egy egyszerű n -szögben mindig találhatunk olyan átlót, amely teljesen a sokszög belsejében halad.

FŐLEMMA

Egy egyszerű n -szögben mindig található olyan átlót, amely teljesen a sokszög belsejében halad. Feltesszük $n > 3$.

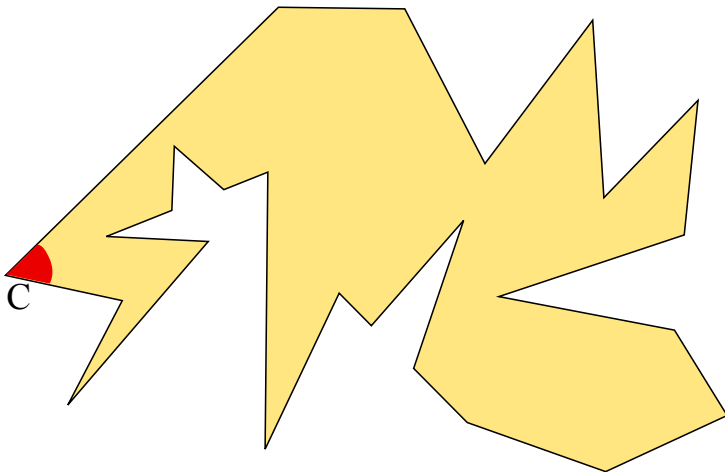
A FÖLEMMA bizonyítása

Vegyünk egy C csúcsot, amelyben konvex szög van!



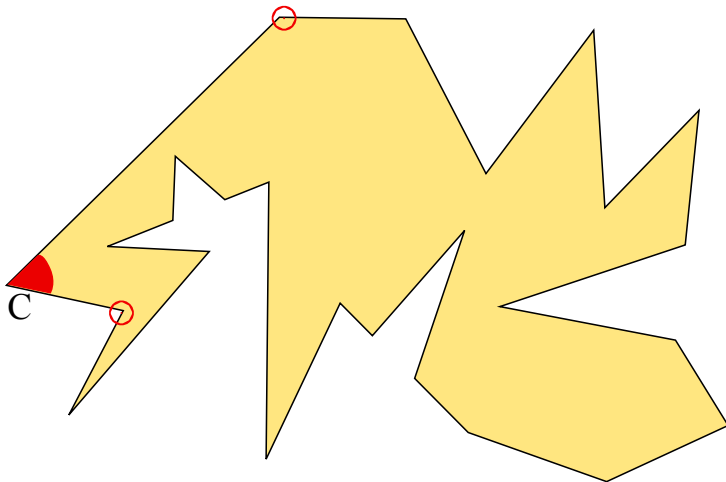
A FÖLEMMA bizonyítása

Vegyünk egy C csúcsot, amelyben konvex szög van!



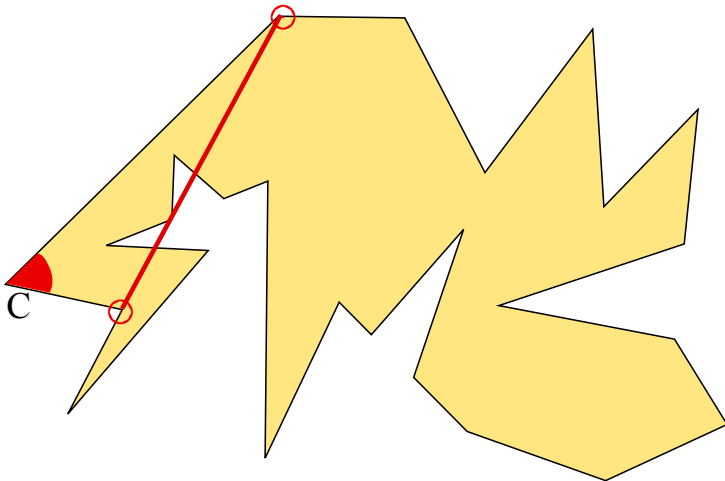
A FÖLEMMA bizonyítása

Legyen a két szomszédos csúcs C^- és C^+ .



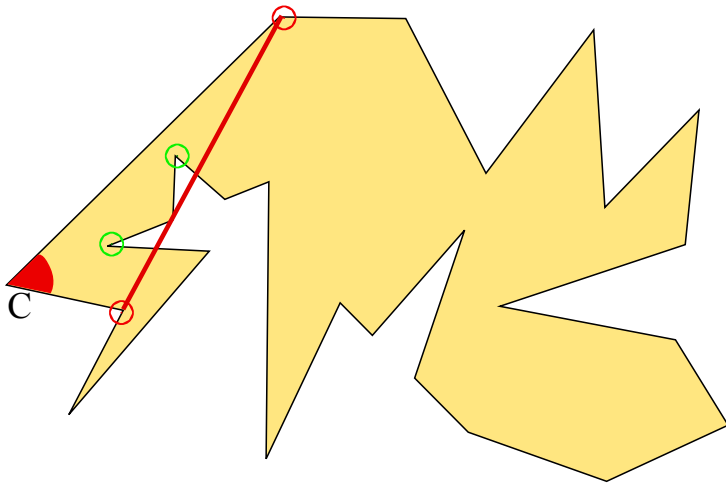
A FÖLEMMA bizonyítása

Legyen a két szomszédos csúcs C^- és C^+ .



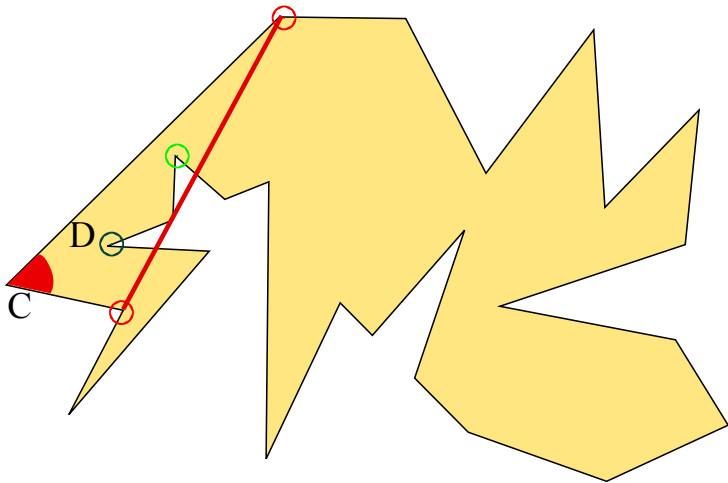
A FŐLEMMA bizonyítása

Ha a C^-C^+ átló nem jó, akkor vegyük a $CC^+\Delta$ -ben lévő, C -től különböző, C^-C^+ -től legtávolabbi D csúcsot.



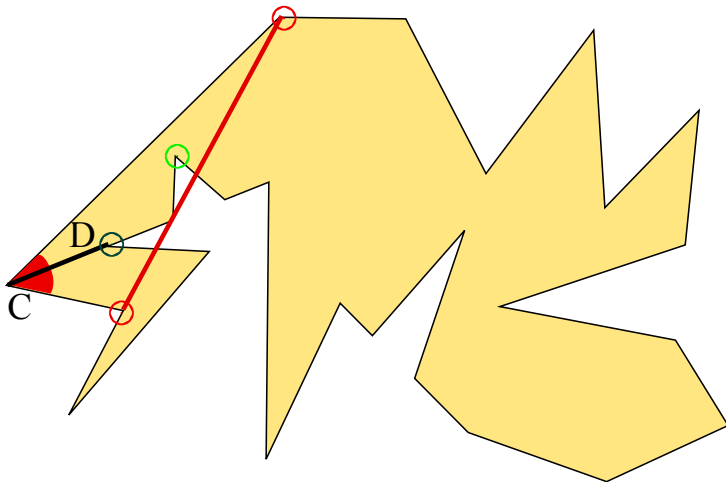
A FŐLEMMA bizonyítása

Ha a C^-C^+ átló nem jó, akkor vegyük a $CC^+\Delta$ -ben lévő, C -től különböző, C^-C^+ -től legtávolabbi D csúcsot.



A FŐLEMMÁ bizonyítása

CD áltó bizonyítja a FŐLEMMÁT.



Észrevétel

Sokszögünket háromszögeljük. Ha úgy rakunk le öröket a csúcsokba, hogy minden háromszög esetén valamelyik csúcsába kerüljön ör, akkor védjük a sokszöget/képtárat.

Fisk-Tétel

Legyen E egy egyszerű háromszögelt sokszög.

Fisk-Tétel

Legyen E egy egyszerű háromszögelt sokszög. Ekkor csúcsai kiszínezhetők három színnel úgy, hogy

Fisk-Tétel

Legyen E egy egyszerű háromszögelt sokszög. Ekkor csúcsai kiszínezhetők három színnel úgy, hogy a háromszögelés minden háromszögében három különböző színű csúcs legyen.

Fisk-Tétel

Legyen E egy egyszerű háromszögelt sokszög. Ekkor csúcsai kiszínezhetők három színnel úgy, hogy a háromszögelés minden háromszögében három különböző színű csúcs legyen.

Bizonyítás

Indukció és FŐLEMMA.

A FŐTÉTEL

FŐTÉTEL (Chvatal)

$$\text{guard}(N) = \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor.$$

Mi a helyzet 3-dimenzióban?

Mi a helyzet 3-dimenzióban?

TAPASZTALAT: A 3-dimenzió sokkal nehezebb mint a 2-dimenzió másfélszerese.

Mi a helyzet 3-dimenzióban?

TAPASZTALAT: A 3-dimenzió sokkal nehezebb mint a 2-dimenzió másfélszerese.

1. KÉRDÉS: Hogyan mérjük egy poliéder bonyolultságát?

Mi a helyzet 3-dimenzióban?

TAPASZTALAT: A 3-dimenzió sokkal nehezebb mint a 2-dimenzió másfélszerese.

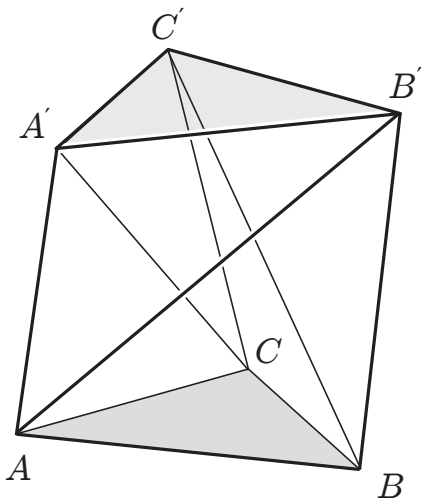
1. KÉRDÉS: Hogyan mérjük egy poliéder bonyolultságát?
2. KÉRDÉS: Mi az “egymást nem metsző átlókkal háromszögre bontás” térbeli megfelelője?

Mi a helyzet 3-dimenzióban?

TAPASZTALAT: A 3-dimenzió sokkal nehezebb mint a 2-dimenzió másfélszerese.

1. KÉRDÉS: Hogyan mérjük egy poliéder bonyolultságát?
2. KÉRDÉS: Mi az “egymást nem metsző átlókkal háromszögre bontás” térbeli megfelelője?
3. KÉRDÉS: Minden csúcsba rajunk őrt. Őrzik a képtárat?

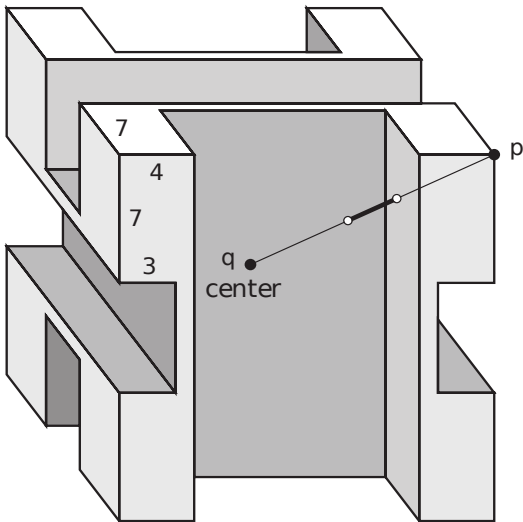
Schönhardt példája



Minden csúcsban ő

Minden csúcsban ör

Octoplex $20 \times 20 \times 20$ méretű kockában



Itt a vége!

Köszönöm a figyelmet!