HAJNAL IMRE MATEMATIKA TESZTVERSENY

Feladatsor

I. kategória

Békés Megyei Tagozata

Békés Megyei Harruckern János Középiskola

MTA SZAB Békés Megyei Testületének Matematika Tudományos Műhelye

2014. április 5.

Gyula

1. $2014 = p \cdot q \cdot r$, ahol *p*, *q* és *r* páronként különböző prímek. $p+q+r=$
(A) 7 (B) 72 (C) 74 (D) 81 (E) 76

2. A hegyesszögű *ABC* háromszögben *D* az *AC* oldal felezőpontja, *E* pedig *D*-ből az *AB* oldalra állított merőleges talppontja. Tudjuk, hogy $AD = 5$, $AE = 4$ és $EB = 2 \cdot AE$. Ekkor $BC =$
(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) $2\sqrt{13}$ (E) 7,2

3. Húsz darab valós szám átlaga 30, harminc darab, az előzőektől különböző valós szám átlaga pedig 20. Mennyi a tekintett ötven darab valós szám átlaga?
(A) 23 (B) 24 (C) 25 (D) 26 (E) 27

4. Hány olyan pozitív egészekből álló rendezett (*a*; *b*) számpár van, amely kielégíti a $\sqrt{a+\sqrt{b}} = 2\sqrt{7}$ egyenletet?
(A) 27 (B) 28 (C) 54 (D) 56 (E) 14

5. A # egy kétváltozós művelet az egész számok halmazán. Tudjuk, hogy $10 \# 5 = 9$, $11 \# 6 = 7$ és $13 \# 8 = 3$. Ezek alapján $6 \# 3 =$
(A) 15 (B) 11 (C) 10 (D) 7 (E) 5

6. Adott a síkon három darab háromszög. Tudjuk róluk, hogy megfelelő szögeik páronként egyenlő nagyságúak, illetve hogy mindhárom háromszögnek van adott, *a* és *b* hosszúságú oldala. Az alábbi állítások közül hány teljesül biztosan?
(1) A háromszögek közül legalább kettő hasonló.
(2) A három darab háromszög páronként hasonló egymáshoz.
(3) A háromszögek közül legalább kettő egybevágó.
(4) A három darab háromszög páronként egybevágó.
(A) egy sem (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

7. Kata és Dani kap egy hatalmas tábla csokoládét, amely *n* x *n* darab egybevágó kis kockából áll. A következőképpen osztoznak: Kata tör magának 10 kocka csokoládét, Dani is tör 10-et, majd ismét Kata 10-et, ismét Dani 10-et, és így tovább, egészen addig, míg az utolsó körben Daninak már 10-nél kevesebb kocka marad. Ekkor Kata a sajátjából átad néhány kocka csokoládét úgy, hogy mindkét gyereknek ugyanannyi csokoládéja lesz a végén. Hány kockát adott át Kata Daninak?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) nem lehet egyértelműen megállapítani

8. Balról jobbra haladva leírjuk egymás mellé a pozitív egész számokat. Melyik számjegy áll a 2014-ik helyen?
(A) 0 (B) 8 (C) 9 (D) 7 (E) 1

9. Az *ABCD* derékszögű trapéz érintőnégyszög. A rövidebb alap, $CD = 8$, a beírható kör sugara pedig 6. Mekkora a trapéz területe?
(A) 96 (B) 128 (C) 144 (D) 384 (E) 192

10. Egy egzotikus szigeten csíkos és kockás fülű nyulak élnek. Kezdetben a sziget nyúlpopulációjának 80%-a kockás fülű. A szigeten kitör a nyúlnátha, amely csak a kockás fülűeket támadja: közülük azonban jó néhány állat elpusztul. A járvány elmúltával a kockás fülűek a nyúlnépesség 50%-át teszik ki. Feltéve, hogy a szóban forgó időszakban nem volt szaporulat, a sziget teljes nyúlnépességének hány százaléka esett a nyúlnátha áldozatául?

(A) 20 (B) 30 (C) 60 (D) 75 (E) 80

11. Az $x=\frac{1}{4}y+a$ egyenletű egyenes és az $y=\frac{1}{4}x+b$ egyenletű egyenes az (1; 2) pontban metszi egymást. Ekkor $a+b=$

(A) 0 (B) $\frac{3}{4}$ (C) 1 (D) 2 (E) $\frac{9}{4}$

12. Tekintsük a koordinátarendszerben a (0; 0) és (12; 36) végpontokkal rendelkező szakaszt. Jelöljük ki véletlenszerűen a szakasz két, a végpontoktól különböző, pozitív egész koordinátákkal rendelkező pontját. Mi a valószínűsége annak, hogy a kijelölt pontok olyan arányban osztják az eredeti szakaszt, hogy annak így kapott három részéből háromszög szerkeszthető?

(A) $\frac{6}{55}$ (B) $\frac{2}{11}$ (C) $\frac{16}{55}$ (D) $\frac{4}{11}$ (E) $\frac{5}{11}$

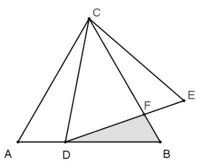
13. Hány pozitív egészekből álló rendezett (*x*; *y*) számpár megoldása van az $x^2-4xy+3y^2=17$ egyenletnek?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

14. Az $a_1, a_2, \ldots$ sorozatra $a_1=2$, $a_2=3$ és $a_n=\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$, ha $n\geq 3$. Ekkor $a_{2014}=$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2 (E) 3

15. Az ábrán látható *ABC* és *CDE* háromszögek szabályosak, $AB=3$ és $AB=3\cdot AD$. Mekkora a *DBF* háromszög területe?



(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{3}{5}$

16. A derékszögű koordináta-rendszer origójából az (*n*; *n*) pontba 3432 különböző úton juthatunk el úgy, hogy egy lépés során vagy jobbra, vagy felfelé lépünk 1-et. Ekkor $n=$

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 11 (E) 13

17. Nevezzük *majdnem-prímek*nek azokat a természetes számokat, amelyek két – nem feltétlenül különböző – prímszám szorzataként állnak elő. Legyen *P* az 50-nél nem nagyobb *majdnem-prímek* szorzata. Hány osztója van *P*-nek?

(A) 7000 (B) 28512 (C) 57024 (D) 114048 (E) 228096

18. Egy egységnyi élhosszúságú kocka csúcsait az oda futó élek csúcshoz közelebb eső harmadoló pontjaira illeszkedő síkkal levágjuk. Hány területegység az így keletkező 14 lapú test felszíne?

(A) $\frac{2\cdot\left(21+2\sqrt{3}\right)}{9}$ (B) $\frac{2\cdot\left(7+2\sqrt{6}\right)}{3}$ (C) $\frac{77}{81}$ (D) $\frac{7\sqrt{3}}{9}$ (E) $\frac{14}{3}$

19. Hány olyan pozitív egész számokból álló rendezett (*a*; *b*) pár van, amely kielégíti a $2a+3b=2014$ egyenletet?

(A) 1007 (B) 650 (C) 350 (D) 670 (E) 335

20. Jelölje A az első száz pozitív egész szám halmazát. A B halmaz ($B\subseteq A$) olyan, hogy nincs két olyan eleme, amelyek összege 125 lenne. Legfeljebb hány eleme van *B*-nek?

(A) 50 (B) 51 (C) 62 (D) 65 (E) 68

21. Marcinak van öt piros és négy kék számkártyája. A piros kártyákon rendre az 1, 2, 3, 4, 5 számok, a kék kártyákon pedig a 3, 4, 5, 6 számok találhatók. Ezt a kilenc kártyát Marci úgy rakta le egy sorba, hogy a színek váltakoztak, és minden egyes piros kártyán levő szám osztója volt a szomszédos kék kártyákon lévő számoknak. Mennyi a középső három kártyán található számok összege?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

22. Az egyik év (N) 300-adik napja és az ezt követő év (N + 1) 200-adik napja is kedd volt. A hét melyik napjára esett a tekintett évet megelőző év (N – 1) 100-adik napja?

(A) csütörtök (B) péntek (C) szombat (D) vasárnap (E) hétfő

23. Hány pozitív egészekből álló rendezett (*x*; *y*) számpár megoldása van a következő egyenletnek: $\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)=2$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

24. A síkban a k_1, k_2 és k_3 körök páronként érintik egymást kívülről. k_1 sugara 1, a k_2 és k_3 körök pedig egybevágók. Ennek a három körnek mindegyikét érinti kívülről a *k* kör. Tudjuk még, hogy k_1 illeszkedik *k* középpontjára. Ekkor k_2 sugara

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{8}{9}$ (E) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

25. Három házaspár közös vacsorán vettek részt egy étteremben. Az étterembe egyenként érkeztek, különböző időpontokban. Minden újonnan érkező ember érkezéskor kezet fogott a már ott tartózkodókkal, kivéve a saját házastársát. Miután mindenki leült vacsorázni, az egyik ember megkérdezte az összes többitől, hogy hány emberrel fogott kezet érkezéskor. Hányadikként érkezhetett a kérdező, ha kérdésére öt különböző választ kapott?

(A) elsőként (B) másodikként (C) ötödikként (D) harmadikként vagy negyedikként (E) hatodikként