HAJNAL IMRE
MATEMATIKA TESZTVERSENY

Feladatsor

II. kategória

Békés Megyei Tagozata

Békés Megyei Harruckern János Középiskola

MTA SZAB Békés Megyei Testületének Matematika Tudományos Műhelye

2014. április 5.

Gyula

1. $2014 = p \cdot q \cdot r$, ahol *p*, *q* és *r* páronként különböző prímek. $p+q+r=$

(A) 7 (B) 72 (C) 74 (D) 81 (E) 76

2. A hegyesszögű ABC háromszögben D az AC oldal felezőpontja, E pedig D-ből az AB oldalra állított merőleges talppontja. Tudjuk, hogy $AD=5$, $AE=4$ és $EB=2\cdot AE$. Ekkor $BC=$

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) $2\sqrt{13}$ (E) 7,2

3. Húsz darab valós szám átlaga 30, harminc darab, az előzőektől különböző valós szám átlaga pedig 20. Mennyi a tekintett ötven darab valós szám átlaga?

(A) 23 (B) 24 (C) 25 (D) 26 (E) 27

4. Hány olyan pozitív egészekből álló rendezett (*a*; *b*) számpár van, amely kielégíti a $\sqrt{a+\sqrt{b}} = 2\sqrt{7}$ egyenletet?

(A) 27 (B) 28 (C) 54 (D) 56 (E) 14

5. A # egy kétváltozós művelet az egész számok halmazán. Tudjuk, hogy $10 \# 5 = 9$, $11 \# 6 = 7$ és $13 \# 8 = 3$. Ezek alapján $6 \# 3 =$

(A) 15 (B) 11 (C) 10 (D) 7 (E) 5

6. Adott a síkon három darab háromszög. Tudjuk róluk, hogy megfelelő szögeik páronként egyenlő nagyságúak, illetve hogy mindhárom háromszögnek van adott, *a* és *b* hosszúságú oldala. Az alábbi állítások közül hány teljesül biztosan?
(1) A háromszögek közül legalább kettő hasonló.
(2) A három darab háromszög páronként hasonló egymáshoz.
(3) A háromszögek közül legalább kettő egybevágó.
(4) A három darab háromszög páronként egybevágó.

(A) egy sem (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

7. Kata és Dani kap egy hatalmas tábla csokoládét, amely *n* x *n* darab egybevágó kis kockából áll. A következőképpen osztoznak: Kata tör magának 10 kocka csokoládét, Dani is tör 10-et, majd ismét Kata 10-et, ismét Dani 10-et, és így tovább, egészen addig, míg az utolsó körben Daninak már 10-nél kevesebb kocka marad. Ekkor Kata a sajátjából átad néhány kocka csokoládét úgy, hogy mindkét gyereknek ugyanannyi csokoládéja lesz a végén. Hány kockát adott át Kata Daninak?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) nem lehet egyértelműen megállapítani

8. Balról jobbra haladva leírjuk egymás mellé a pozitív egész számokat. Melyik számjegy áll a 2014-ik helyen?

(A) 0 (B) 8 (C) 9 (D) 7 (E) 1

9. Az $ABCD$ derékszögű trapéz érintőnégyszög. A rövidebb alap, $CD=8$, a beírható kör sugara pedig 6. Mekkora a trapéz területe?

(A) 96 (B) 128 (C) 144 (D) 384 (E) 192

10. Egy egzotikus szigeten csíkos és kockás fülű nyulak élnek. Kezdetben a sziget nyúlpopulációjának 80%-a kockás fülű. A szigeten kitör a nyúlnátha, amely csak a kockás fülűeket támadja: közülük azonban jó néhány állat elpusztul. A járvány elmúltával a kockás fülűek a nyúlnépesség 50%-át teszik ki. Feltéve, hogy a szóban forgó időszakban nem volt szaporulat, a sziget teljes nyúlnépességének hány százaléka esett a nyúlnátha áldozatául?

(A) 20 (B) 30 (C) 60 (D) 75 (E) 80

11. Az $x=\frac{1}{4}y+a$ egyenletű egyenes és az $y=\frac{1}{4}x+b$ egyenletű egyenes az (1; 2) pontban metszi egymást. Ekkor $a+b=$

(A) 0 (B) $\frac{3}{4}$ (C) 1 (D) 2 (E) $\frac{9}{4}$

12. Tekintsük a koordinátarendszerben a (0; 0) és (12; 36) végpontokkal rendelkező szakaszt. Jelöljük ki véletlenszerűen a szakasz két, a végpontoktól különböző, pozitív egész koordinátákkal rendelkező pontját. Mi a valószínűsége annak, hogy a kijelölt pontok olyan arányban osztják az eredeti szakaszt, hogy annak így kapott három részéből háromszög szerkeszthető?

(A) $\frac{6}{55}$ (B) $\frac{2}{11}$ (C) $\frac{16}{55}$ (D) $\frac{4}{11}$ (E) $\frac{5}{11}$

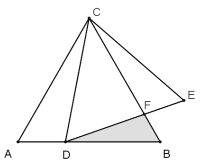
13. Hány pozitív egészekből álló rendezett (*x*; *y*) számpár megoldása van az $x^2-4xy+3y^2=17$ egyenletnek?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

14. Az $a_1, a_2, \ldots$ sorozatra $a_1=2$, $a_2=3$ és $a_n=\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$, ha $n\geq 3$. Ekkor $a_{2014}=$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2 (E) 3

15. Az ábrán látható *ABC* és *CDE* háromszögek szabályosak, $AB=3$ és $AB=3\cdot AD$. Mekkora a *DBF* háromszög területe?



(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{3}{5}$

16. A derékszögű koordináta-rendszer origójából az (*n*; *n*) pontba 3432 különböző úton juthatunk el úgy, hogy egy lépés során vagy jobbra, vagy felfelé lépünk 1-et. Ekkor $n=$

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 11 (E) 13

17. Nevezzük *majdnem-prímek*nek azokat a természetes számokat, amelyek két – nem feltétlenül különböző – prímszám szorzataként állnak elő. Legyen *P* az 50-nél nem nagyobb *majdnem-prímek* szorzata. Hány osztója van *P*-nek?

(A) 7000 (B) 28512 (C) 57024 (D) 114048 (E) 228096

18. Egy egységnyi élhosszúságú kocka csúcsait az oda futó élek csúcshoz közelebb eső harmadoló pontjaira illeszkedő síkkal levágjuk. Hány területegység az így keletkező 14 lapú test felszíne?

(A) $\frac{2\cdot(21+2\sqrt{3})}{9}$ (B) $\frac{2\cdot(7+2\sqrt{6})}{3}$ (C) $\frac{77}{81}$ (D) $\frac{7\sqrt{3}}{9}$ (E) $\frac{14}{3}$

19. Hány olyan pozitív egész számokból álló rendezett (*a*; *b*) pár van, amely kielégíti a $2a+3b=2014$ egyenletet?

(A) 1007 (B) 650 (C) 350 (D) 670 (E) 335

20. Jelölje A az első száz pozitív egész szám halmazát. A B halmaz ($B\subseteq A$) olyan, hogy nincs két olyan eleme, amelyek összege 125 lenne. Legfeljebb hány eleme van *B*-nek?

(A) 50 (B) 51 (C) 62 (D) 65 (E) 68

21. Az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=ax^2+bx+c$ függvény zérushelyeinek összege, szorzata és az együtthatók összege ugyanaz a szám. Mit mondhatunk erről a számról?

(A) *a*-val egyenlő (B) *b*-vel egyenlő (C) $f(0)$-val egyenlő
(D) az egyik zérushellyel egyenlő (E) a zérushelyek átlagával egyenlő

22. Van két szabályos érménk. Az egyiket háromszor, a másikat négyszer dobjuk fel. Mi a valószínűsége annak, hogy mindkét érmével ugyanannyi fejet dobunk?

(A) $\frac{19}{128}$ (B) $\frac{23}{128}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{35}{128}$ (E) $\frac{1}{2}$

23. Az *ABC* háromszög köré írható körén a *D* pont úgy helyezkedik el, hogy az *AD* egyenes felezi a háromszög *A* csúcsnál levő belső szögét. Ha $AC=7$, $AB=8$ és $BC=9$, akkor $\frac{AD}{BD}=$

(A) $\frac{9}{8}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) 2 (D) $\frac{17}{7}$ (E) $\frac{5}{2}$

24. *S* azon rendezett (*x*; *y*; *z*) számhármasok halmaza, amelyek kielégítik a $\lg(x+y)=z$ és $\lg(x^2+y^2)=z+1$ egyenletekből álló egyenletrendszert. Ha léteznek olyan *a* és *b* valós számok, hogy *S* minden elemére $x^3+y^3=a\cdot 10^{3z}+b\cdot 10^{2z}$, akkor $a+b=$

(A) $\frac{15}{2}$ (B) $\frac{29}{2}$ (C) 15 (D) $\frac{39}{2}$ (E) 24

25. A derékszögű koordináta-rendszerben az *ABCD* négyzet területe 36 és *AB* oldala párhuzamos az *x* tengellyel. Az *A* csúcs az $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}, f(x)=\log_a x$ függvény grafikonjára, a *B* csúcs a $g:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}, g(x)=2\cdot\log_a x$ függvény grafikonjára, a *C* csúcs pedig a $h:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}, h(x)=3\cdot\log_a x$ függvény grafikonjára illeszkedik. Ekkor $a=$

(A) $\sqrt[6]{3}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt[3]{6}$ (D) $\sqrt{6}$ (E) 6