Néhány érdekes végtelen összegről

HIMT

Gyula

2014.04.05.

Dr. Németh József

egyetemi docens

SZTE, TTIK; Analízis tanszék

MOTTÓ:

... nem igaz, hogy az esméret' gyönyörűségének tsak a' haszon vólna a' rugója. Gyönyörködik a' Kertész számtalan plántáibann és virágaibann, mellyeknek semmi hasznát nem tudja; gyönyörködik a mezei ember, ha az Égre tekintvénn egynéhány Tsillagokat névenn nevezhet; gyönyörködik a' tanúlt ember a' Tudománybann a' mellybenn jártas; bár annak orvosi és gazdasági hasznáról nem számolhat is. Maga az esméret-terjedése és szélesedése az ember okos lelkébenn a' legtisztább és nemesebb gyönyörűség-érzésnek kútfeje. A' ki abból magából is gyönyörűséget érezni nem tud: tegye férle a' Természet vizsgálását; sőt a' Tudománynak minden névvel nevezendő nemét tegye félre; nem néki való....

(Fazekas Mihály és Diószegi Sámuel: Magyar Fűvész könyv, 1807).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \infty$$

Néhány rokon:

A.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Állítás: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \ln 2 = \log_e 2.$

Sok bizonyítás. Most 5-öt mutatok be (*elemitől* a *felsőbb* matematikáig. Ld. Mottó)

1. *Elemi* (1951 Elemente der Math.)

$e \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

o) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \uparrow;$ oo) korlátos $\Rightarrow$ konv.

(biz: *számtani-mértani* közép).

Ad o)

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} < \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n + 1} =$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Ad oo)

$$\sqrt[n+2]{\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}} < \tfrac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+2} = 1 \Rightarrow \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n} \leq 4.$$

Hasonlóan látható be, hogy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \downarrow e$.

Most nézzük a bizonyítást:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n} - 2\underbrace{\left(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)}_{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} = \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Belátjuk, hogy $s_{2n} \to \ln 2$ és mivel $s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1} \to \ln 2 \Rightarrow s_n \to \ln 2$

Világos:

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} < e < \left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu} \Rightarrow$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{\nu}\right) < \frac{1}{\nu} < \ln\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right) \qquad (*)$$

Ha (*)-ba $\nu = n+1, n+2, \ldots, 2n$, akkor

$$\Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) < \frac{1}{2n} < \ln\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)$$

$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) < \frac{1}{n+1} + \ldots \frac{1}{2n} < \ln 2n - \ln n$$

$$\Rightarrow \ln\frac{2n+1}{n+1} < \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} < \ln 2$$

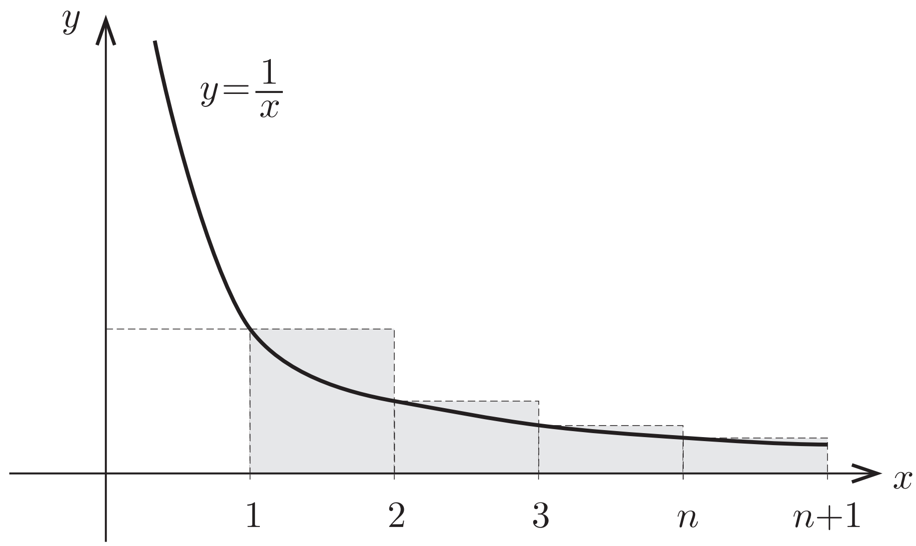
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\ln 2 \qquad\qquad \ln 2 \qquad\qquad \ln 2$$

MIT HASZNÁLTUNK? (emelt szintű...) Elemi??

2. *Kicsit "magasabb" mat.*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx \ln n$$



$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\int_{1}^{n}\frac{1}{x}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\overset{\text{jel}}{=}\Delta n$$

Trivi $\Delta n\downarrow$ (és korlátos) $\Rightarrow \Delta n$ konvergens

$\Delta n \to \gamma$ Euler-Mascheroni konstans

$\gamma = 0,577721$

Rac? Irrac? [Ha $\frac{p}{q} = \gamma$ akkor $q > 10^{242800}$ (2002)

HARDY - Oxford Univ. tanszékét odaadja.....]

A Riemann-féle zeta-függvény Laurent sorában a $c_0 = \gamma$ (0-adik együttható), azaz:

$$\gamma = \lim_{s\to 1}(\zeta(s)-\frac{1}{s-1});\quad \zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\dots$$

Kapcsolat a prímszám-tétellel;

$$e^{\gamma} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln p_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_i - 1}$$

[Megjegyzés: Riemann-sejtés; Hilbert (1862-1943) 1900; 23; 1000 év után, kérdése...]

Térjünk rá $s_{2n} \to ln2$-re

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} =$$

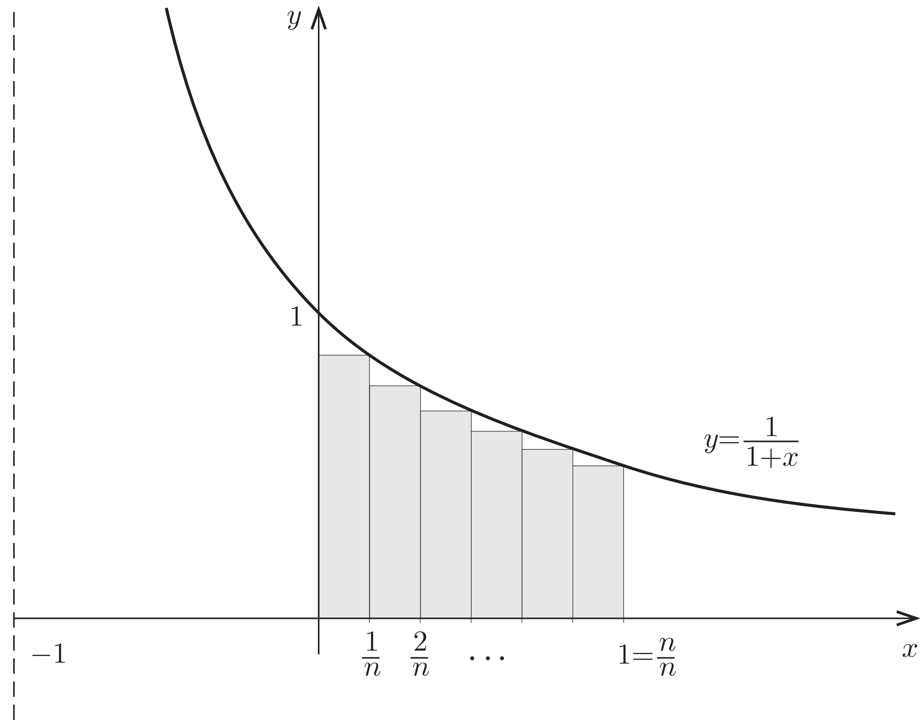
$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln 2n}_{\substack{\downarrow \\ \gamma}} - \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n}_{\substack{\downarrow \\ \gamma}}\Big) + \ln 2 \Rightarrow s_{2n \to \ln 2}$$

MIT HASZNÁLTUNK? (emelt szintű)

3. *Még "feljebb" megyünk*

$$s_{2n} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \Big(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\Big) = t_n$$



Mivel $\frac{1}{1+x} \downarrow \Rightarrow R-\text{inth.} \overset{\text{Darboux t}}{\Rightarrow} t_n \to \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln 2$

MIT HASZNÁLTUNK? (egy ”kis” egyetemi Mat. Bsc. 2. félév.)

4. Még ”magasabbra”.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad \text{ha} \quad |x| < 1.$$

(geometriai sor)

Hatványsor tagonként integrálható.

$$\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x}dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} +$$

(integr. konstans $c = 0$)

Tehát

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots, \quad \text{ha} \quad |x| < 1.$$

Ha $x = 1$, akkor

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$$

[Newton; 1680; Euler; 1730]

De a kérdés: Szabad-e?? ($x = 1$)

Abel (1820): *igen*.

(Ha $x = 1$-ben konvergens a sor (igen; Leibniz-kritérium), akkor [0;1]-en *egyenletes* a konvergencia $\Rightarrow$ összegfüggvény folytonos $\Rightarrow$ $\ln(1+x)$-et kell venni $x = 1$-ben is (nem lehet lyuk; a gombócot a lyukba kell tenni).

MIT HASZNÁLTUNK? (Bocs!! Milyen jó volt Newtonnak...)

Megjegyzés:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots=\ln\sqrt[3]{2}+\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Mottó!

Itt is: $\frac{1}{1+x^3}=1-x^3+x^6-x^9+\ldots/1+x+x^2$

$$\Rightarrow \frac{1+x+x^2}{1+x^3}=1+x+x^2-x^3-x^4-x^5+\ldots$$

$$\Rightarrow \int \frac{1+x+x^2}{1+x^3}dx=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}\ldots$$

A bal oldal:

$$\frac{1}{3}\ln(1+x^3)+\frac{2}{\sqrt{3}}\ \mathrm{arctg}\ \frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\ \mathrm{arctg}\ \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(Mat. Bsc 1 év végén **Diff. és int.** számítás)

Vissza az eredeti sorunkra.

5. A "csúcson" vagyunk (Climax)

Az $f(x)=\ln\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$, (ha $0<x<2\pi$)

függvény Fourier-sora:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$$

és mivel f differenciálható $(0;2\pi)$-n $\Rightarrow$ pontonkénti konvergencia van, azaz

$$\ln \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \quad \text{ha} \quad 0 < x < 2\pi.$$

(a feladat tanárszakon 6. flélévben szigorlati példa volt az 5 éves képzésben).

Vegyünk: $x = \frac{\pi}{2}$.

o) $\ln \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4}} = \ln \frac{1}{2.\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\ln\sqrt{2} = -\frac{1}{2}\ln 2$

oo)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} =$$

$$= -\frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots) \Rightarrow$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

MIT HASZNÁLTUNK? (**Ezer** bocs!!) ”Durva”

Záró gondolatok

B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ konvergens-e? (Ságvári)

o) Igen

oo) Mennyi az összege?

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad \text{ha} \quad x \in (0; 2\pi)$$

Fourier sora: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ és $\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad \text{ha} \quad x \in (0; 2\pi)$$

(Konvergencia van itt is).

Tehát $x = 1$-nél konverges és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi-1}{2}$.

Ha $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ Leibniz: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$.

Ez egy másik rokon (Leibniz; Newton)

Megjegyzés: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ konvergencia következik az alábbi kritériumból:

Dirichlet-kritérium: Ha $a_n \downarrow 0$ és $B_n = b_1 + \ldots + b_n$ sorozat korlátos, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, b_n \quad \text{konvergens.}$$

(első félévben Mat. Bsc-n tétel.)

Másrészt: (Függvénytábla; $e^{i\varphi} \to$ mértani sorozat)

$$\sin x + \sin 2x + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} \quad (x \neq 2k\pi)$$

$$\Rightarrow |\sin 1 + \sin 2 + \ldots + \sin n| \leq K.$$

$$\Rightarrow \sum_{|}^{\infty} a_n \cdot b_n = \sum_{|}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin n \quad \text{konvergens.}$$