Polinomok gyökei és a kombinatorika

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2014. április 5.

Bemelegítő feladat I.

Bemelegítő feladat I.

- Szobánkban reggel felébredünk.

Bemelegítő feladat I.

- Szobánkban reggel felébredünk.

Bemelegítő feladat I.

- Szobánkban reggel felébredünk.

- Este lefekvés előtt egy kicsit leülünk a szobánk előtt, a kertben.

Bemelegítő feladat I.

- Szobánkban reggel felébredünk.

- Este lefekvés előtt egy kicsit leülünk a szobánk előtt, a kertben.
- Hányszor mentünk át az ajtón?

Bemelegítő feladat II.

- Budapesten sétálunk.

Bemelegítő feladat II.

- Budapesten sétálunk.
- Pestről indulunk.

Bemelegítő feladat II.

- Budapesten sétálunk.
- Pestről indulunk.
- 2014-szer haladunk át hídon.

Bemelegítő feladat II.

- Budapesten sétálunk.
- Pestről indulunk.
- 2014-szer haladunk át hídon.

Bemelegítő feladat II.

- Budapesten sétálunk.
- Pestről indulunk.
- 2014-szer haladunk át hídon.

- Melyik oldalon (Buda/Pest) vagyunk?

Melegedjünk be jobban!

Melegedjünk be jobban!

- Budapesten sétálunk.

Melegedjünk be jobban!

- Budapesten sétálunk.
- Pestről indulunk.

Melegedjünk be jobban!

- Budapesten sétálunk.
- Pestről indulunk.
- Budára érkezünk.

Melegedjünk be jobban!

- Budapesten sétálunk.
- Pestről indulunk.
- Budára érkezünk.

Melegedjünk be jobban!

- Budapesten sétálunk.
- Pestről indulunk.
- Budára érkezünk.

- Hányszor mentünk át hídon?

Polinomok, alapok

Jelölés

$\mathbb{R}[x]$.

Polinomok, alapok

Jelölés

$\mathbb{R}[x]$.

$p \in \mathbb{R}[x]$

- $p = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \ldots + a_0, \quad a_d \neq 0$

Polinomok, alapok

Jelölés

$\mathbb{R}[x]$.

$p \in \mathbb{R}[x]$

- $p = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_0, \quad a_d \neq 0$
- $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$ véges összeg

Polinomok, alapok

Jelölés

$\mathbb{R}[x]$.

$p \in \mathbb{R}[x]$

- $p = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \ldots + a_0, \quad a_d \neq 0$
- $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$ véges összeg
- $p \equiv (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ egy „idő után” kontsans 0

Polinomok, alapok

Jelölés

$\mathbb{R}[x]$.

$p \in \mathbb{R}[x]$

- $p = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \ldots + a_0, \quad a_d \neq 0$
- $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$ véges összeg
- $p \equiv (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ egy „idő után” kontsans 0

Definíció/fokszám

$$\deg p = \max\{k : [x^k]p \neq 0\}.$$

Polinomok, alapok

Jelölés

$\mathbb{R}[x]$.

$p \in \mathbb{R}[x]$

- $p = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \ldots + a_0, \quad a_d \neq 0$
- $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$ véges összeg
- $p \equiv (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ egy „idő után” kontsans 0

Definíció/fokszám

$$\deg p = \max\{k : [x^k]p \neq 0\}.$$

$$\deg 0 = -\infty.$$

Definíció

Az r szám a $p \in \mathbb{R}[x]$ polinom gyöke, ha

- $p(r) = 0$,

Polinomok gyökei

Definíció

Az r szám a $p \in \mathbb{R}[x]$ polinom gyöke, ha

- $p(r) = 0$,
- $p(x) = (x - r)p_0(x)$,

Polinomok gyökei

Definíció

Az r szám a $p \in \mathbb{R}[x]$ polinom gyöke, ha

- $p(r) = 0$,
- $p(x) = (x - r)p_0(x)$, azaz $x - r | p(x)$.

Polinomok gyökei

Definíció

Az r szám a $p \in \mathbb{R}[x]$ polinom gyöke, ha

- $p(r) = 0$,
- $p(x) = (x - r)p_0(x)$, azaz $x - r | p(x)$.

GEOMETRIAILAG:

Definíció

Az r szám a $p \in \mathbb{R}[x]$ polinom gyöke, ha

- $p(r) = 0$,
- $p(x) = (x - r)p_0(x)$, azaz $x - r | p(x)$.

GEOMETRIAILAG: Gyök $\equiv$ Olyan „hely” ahol az x-tengely és a grafikon „találkozik”

Polinomok gyökei

Definíció

Az r szám a $p \in \mathbb{R}[x]$ polinom gyöke, ha

- $p(r) = 0$,
- $p(x) = (x - r)p_0(x)$, azaz $x - r | p(x)$.

GEOMETRIAILAG: Gyök $\equiv$ Olyan „hely” ahol az x-tengely és a grafikon „találkozik”

Definíció

Az r szám a $p \in \mathbb{R}[x]$ polinom μ-szörös multiplicitású gyöke, ha

(i) $(x - r)^{\mu} | p(x)$,

Polinomok gyökei

Definíció

Az r szám a $p \in \mathbb{R}[x]$ polinom gyöke, ha

- $p(r) = 0$,
- $p(x) = (x - r)p_0(x)$, azaz $x - r | p(x)$.

GEOMETRIAILAG: Gyök $\equiv$ Olyan „hely” ahol az x-tengely és a grafikon „találkozik”

Definíció

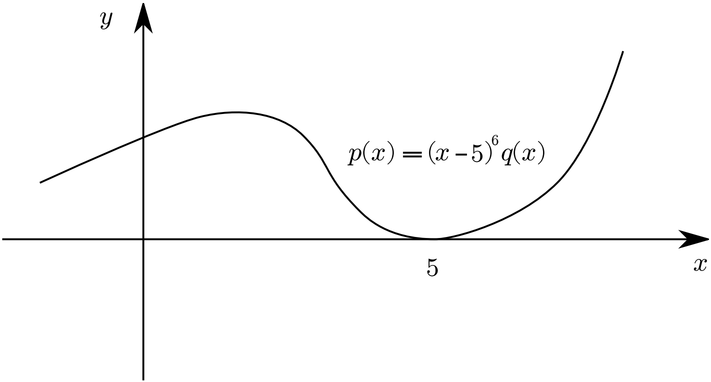
Az r szám a $p \in \mathbb{R}[x]$ polinom μ-szörös multiplicitású gyöke, ha

(i) $(x - r)^{\mu} | p(x)$,

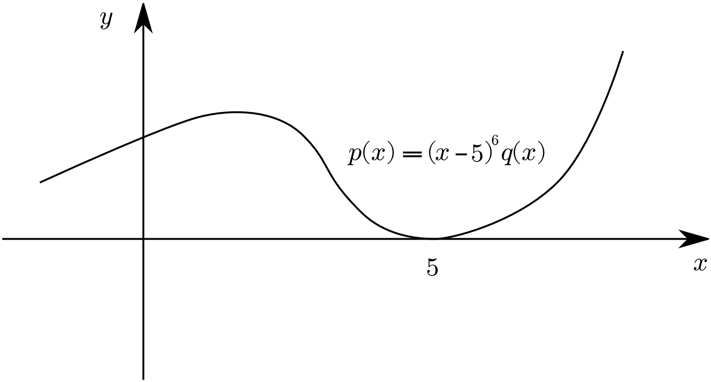
(ii) $(x - r)^{\mu+1} \not| p(x)$.

Páros multiplicitású gyök

Páros multiplicitású gyök



Páros multiplicitású gyök



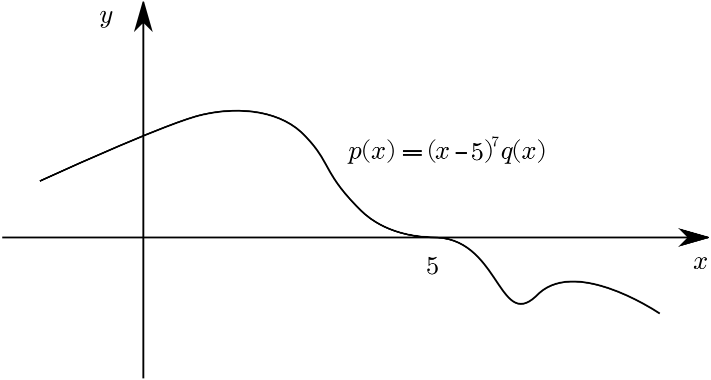
PÁROS mutiplicitású gyök

$\equiv$

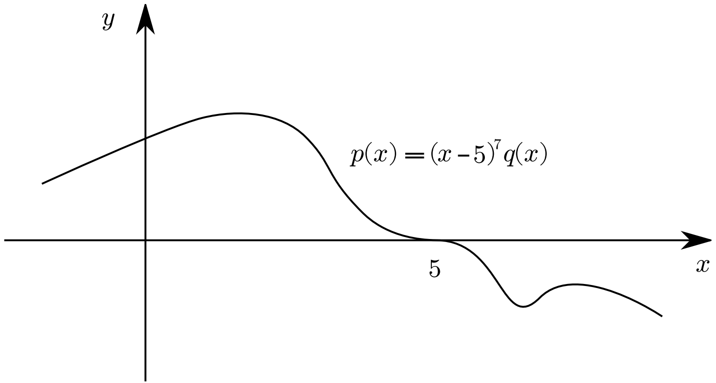
Grafikon NEM VÁLT x-tengely oldalt.

Páratlan multiplicitású gyök

Páratlan multiplicitású gyök



Páratlan multiplicitású gyök



PÁRATLAN mutiplicitású gyök

$$\equiv$$

Grafikon VÁLT x-tengely oldalt.

Középiskola

Alap-gondolkodás: Minden szám valós szám, speciálisan minden polinom valós együtthatós polinom.

Alap-gondolkodás: Minden szám valós szám, speciálisan minden polinom valós együtthatós polinom.

1. tétel

Egy d-ed fokú ($d \in \mathbb{N}$) polinomnak legfeljebb d gyöke van.

Középiskola

Alap-gondolkodás: Minden szám valós szám, speciálisan minden polinom valós együtthatós polinom.

1. tétel

Egy d-ed fokú ($d \in \mathbb{N}$) polinomnak legfeljebb d gyöke van.

1^+. tétel

Egy d-ed fokú ($d \in \mathbb{N}$) polinomnak legfeljebb d gyöke van, akkor is ha a gyököket multiplicitással számoljuk.

Alap-gondolkodás: Minden szám valós szám, speciálisan minden polinom valós együtthatós polinom.

1. tétel

Egy d-ed fokú ($d \in \mathbb{N}$) polinomnak legfeljebb d gyöke van.

1^+. tétel

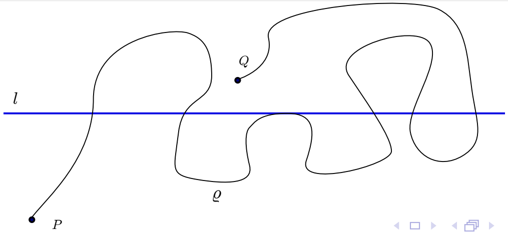
Egy d-ed fokú ($d \in \mathbb{N}$) polinomnak legfeljebb d gyöke van, akkor is ha a gyököket multiplicitással számoljuk.

2.tétel

Minden páratlan fokú polinomnak van (valós) gyöke.

Kombinatorikus Alapelv

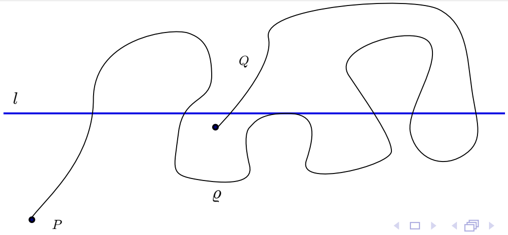
Adott a síkon egy ℓ egyenes, amely a síkot Σ^+ és Σ^- nyilt félsíkokra osztja. Legyen $P \in \Sigma^+$ és ρ egy PQ folytonos görbe, (amely véges sok pontban metszi ℓ-t).
Ekkor



Kombinatorikus Alapelv

Adott a síkon egy ℓ egyenes, amely a síkot Σ^+ és Σ^- nyilt félsíkokra osztja. Legyen $P \in \Sigma^+$ és ρ egy PQ folytonos görbe, (amely véges sok pontban metszi ℓ-t).
Ekkor

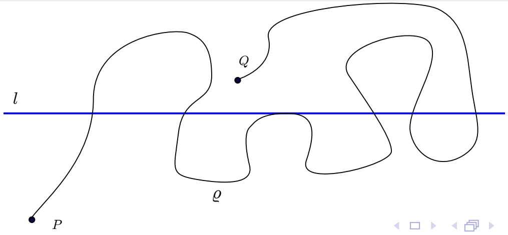
(i) az, hogy Q melyik félsíkba esik



Kombinatorikus Alapelv

Adott a síkon egy ℓ egyenes, amely a síkot Σ^+ és Σ^- nyilt félsíkokra osztja. Legyen $P \in \Sigma^+$ és ρ egy PQ folytonos görbe, (amely véges sok pontban metszi ℓ-t).
Ekkor

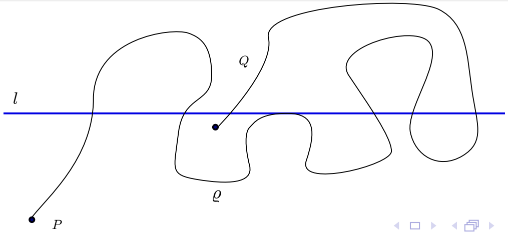
(i) az, hogy Q melyik félsíkba esik



Kombinatorikus Alapelv

Adott a síkon egy ℓ egyenes, amely a síkot Σ^+ és Σ^- nyilt félsíkokra osztja. Legyen $P \in \Sigma^+$ és ρ egy PQ folytonos görbe, (amely véges sok pontban metszi ℓ-t).
Ekkor

(i) az, hogy Q melyik félsíkba esik

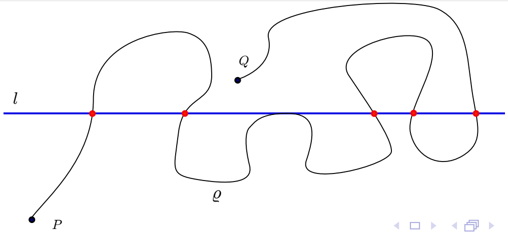


Kombinatorikus Alapelv

Adott a síkon egy ℓ egyenes, amely a síkot Σ^+ és Σ^- nyilt félsíkokra osztja. Legyen $P \in \Sigma^+$ és ρ egy PQ folytonos görbe, (amely véges sok pontban metszi ℓ-t).
Ekkor

(i) az, hogy Q melyik félsíkba esik

(ii) az, hogy γ és ℓ oldalváltó metszéspontjai számának paritása mi



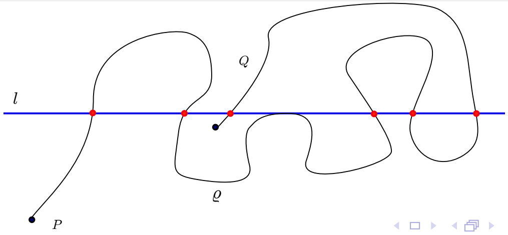
Paritás-elv

Kombinatorikus Alapelv

Adott a síkon egy ℓ egyenes, amely a síkot Σ^+ és Σ^- nyilt félsíkokra osztja. Legyen $P \in \Sigma^+$ és ρ egy PQ folytonos görbe, (amely véges sok pontban metszi ℓ-t).
Ekkor

(i) az, hogy Q melyik félsíkba esik

(ii) az, hogy γ és ℓ oldalváltó metszéspontjai számának paritása mi

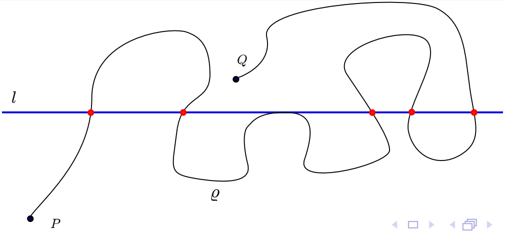


Kombinatorikus Alapelv

Adott a síkon egy ℓ egyenes, amely a síkot Σ^+ és Σ^- nyilt félsíkokra osztja. Legyen $P \in \Sigma^+$ és ρ egy PQ folytonos görbe, (amely véges sok pontban metszi ℓ-t).
Ekkor

(i) az, hogy Q melyik félsíkba esik

(ii) az, hogy γ és ℓ oldalváltó metszéspontjai számának paritása mi



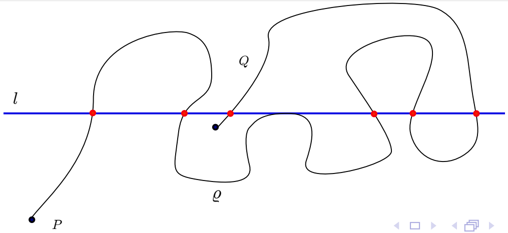
Kombinatorikus Alapelv

Adott a síkon egy ℓ egyenes, amely a síkot Σ^+ és Σ^- nyilt félsíkokra osztja. Legyen $P \in \Sigma^+$ és ρ egy PQ folytonos görbe, (amely véges sok pontban metszi ℓ-t).
Ekkor

(i) az, hogy Q melyik félsíkba esik

(ii) az, hogy γ és ℓ oldalváltó metszéspontjai számának paritása mi

egymás által meghatározott.



Észrevétel

Egy páratlan fokú polinom grafikonján végigsétálva az x tengely egyik oldáról átkerülünk a másikra.

Vissza a polinomok gyökeihez

Észrevétel

Egy páratlan fokú polinom grafikonján végigsétálva az x tengely egyik oldáról átkerülünk a másikra.

Következmény

Egy páratlan fokú polinom grafikonja páratlan sokszor metszi át az x tengelyt.

Vissza a polinomok gyökeihez

Észrevétel

Egy páratlan fokú polinom grafikonján végigsétálva az x tengely egyik oldáról átkerülünk a másikra.

Következmény

Egy páratlan fokú polinom grafikonja páratlan sokszor metszi át az x tengelyt.

AZAZ

Észrevétel

Egy páratlan fokú polinom grafikonján végigsétálva az x tengely egyik oldáról átkerülünk a másikra.

Következmény

Egy páratlan fokú polinom grafikonja páratlan sokszor metszi át az x tengelyt.

AZAZ

Egy páratlan fokú polinomnak páratlan sok páratlan multiplicitású gyöke van.

Vissza a polinomok gyökeihez

Észrevétel

Egy páratlan fokú polinom grafikonján végigsétálva az x tengely egyik oldáról átkerülünk a másikra.

Következmény

Egy páratlan fokú polinom grafikonja páratlan sokszor metszi át az x tengelyt.

AZAZ

Egy páratlan fokú polinomnak páratlan sok páratlan multiplicitású gyöke van.

Következmény

Minden páratlan fokú polinomnak páratlan sok (valós) gyöke van

Vissza a polinomok gyökeihez

Észrevétel

Egy páratlan fokú polinom grafikonján végigsétálva az x tengely egyik oldáról átkerülünk a másikra.

Következmény

Egy páratlan fokú polinom grafikonja páratlan sokszor metszi át az x tengelyt.

AZAZ

Egy páratlan fokú polinomnak páratlan sok páratlan multiplicitású gyöke van.

Következmény

Minden páratlan fokú polinomnak páratlan sok (valós) gyöke van multiplicitással számolva.

Pozitív gyökök száma

Pozitív gyökök száma

Feltesszük/feltehetjük, hogy $a_0 \neq 0$.

Feltesszük/feltehetjük, hogy $a_0 \neq 0$.

Észrevétel

Egy polinom grafikonjának $(0, P(0))$ pontjának viszonya az x tengelyhez az a_0 együttható előjelétől függ.

Pozitív gyökök száma

Feltesszük/feltehetjük, hogy $a_0 \neq 0$.

Észrevétel

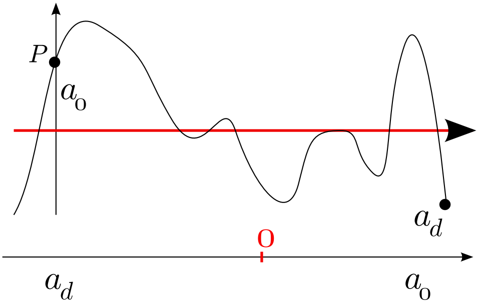
Egy polinom grafikonjának $(0, P(0))$ pontjának viszonya az x tengelyhez az a_0 együttható előjelétől függ.
Egy polinom grafikonjának $(N, P(N))$ pontjának viszonya az x tengelyhez az a_d együttható előjelétől függ.

Pozitív gyökök száma

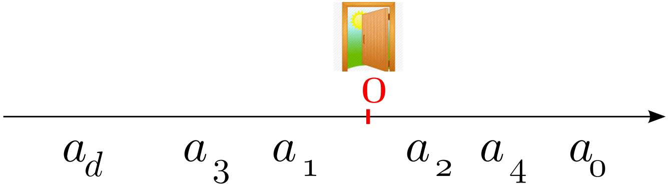
Feltesszük/feltehetjük, hogy $a_0 \neq 0$.

Észrevétel

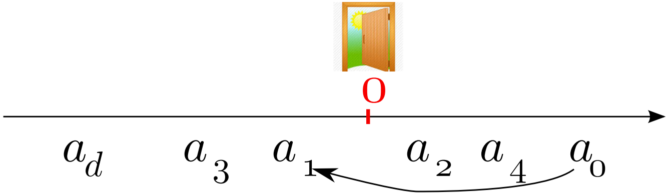
Egy polinom grafikonjának $(0, P(0))$ pontjának viszonya az x tengelyhez az a_0 együttható előjelétől függ.
Egy polinom grafikonjának $(N, P(N))$ pontjának viszonya az x tengelyhez az a_d együttható előjelétől függ.



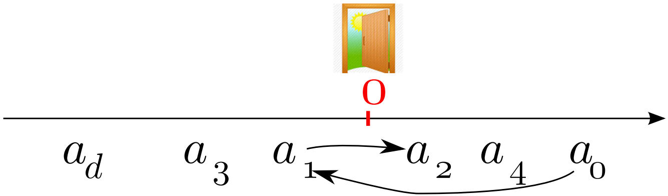
A lényeg



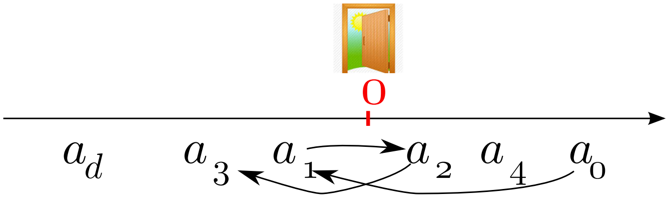
A lényeg



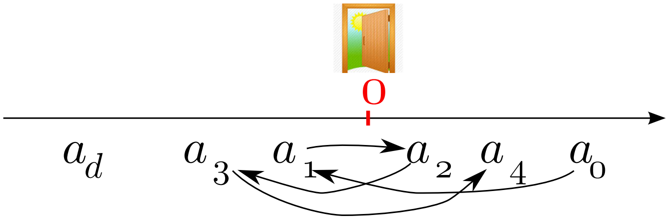
A lényeg



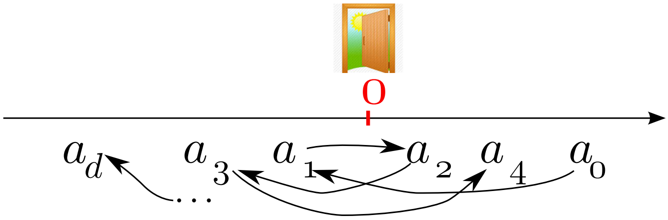
A lényeg



A lényeg



A lényeg



Definíció

$s = (s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}, s_k)$ valós számsorozat előjelváltásaink számát ($\sharp e\text{-}v(s)$) úgy kapjuk meg, hogy

a) a pozitív tagokat $+$-szal helyettesítjük,

b) a 0 tagokat elhagyjuk,

c) a negatív tagokat $-$-szal helyettesítjük

és megszámoljuk, hogy az így nyert sorozatban hányszor vált az előjel.

Számsorozat előjelváltásai

Definíció

$s = (s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}, s_k)$ valós számsorozat előjelváltásaink számát ($\sharp e\text{-}v(s)$) úgy kapjuk meg, hogy

a) a pozitív tagokat $+$-szal helyettesítjük,

b) a 0 tagokat elhagyjuk,

c) a negatív tagokat $-$-szal helyettesítjük

és megszámoljuk, hogy az így nyert sorozatban hányszor vált az előjel.

Példa

$$\sharp e\text{-}v(-2, 3, 5, 6, -3, 0, 0, -1, 2, 0, 0, 5, 6, 1, -2) =$$

Számsorozat előjelváltásai

Definíció

$s = (s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}, s_k)$ valós számsorozat előjelváltásaink számát ($\sharp e\text{-}v(s)$) úgy kapjuk meg, hogy

a) a pozitív tagokat $+$-szal helyettesítjük,

b) a 0 tagokat elhagyjuk,

c) a negatív tagokat $-$-szal helyettesítjük

és megszámoljuk, hogy az így nyert sorozatban hányszor vált az előjel.

Példa

$$\sharp e\text{-}v(-2, 3, 5, 6, -3, 0, 0, -1, 2, 0, 0, 5, 6, 1, -2) =$$

$$\to (- + + + - - + + + + -) \to$$

Számsorozat előjelváltásai

Definíció

$s = (s_0, s_1, s_2, \dots, s_{k-1}, s_k)$ valós számsorozat előjelváltásaink számát ($\sharp e\text{-}v(s)$) úgy kapjuk meg, hogy

a) a pozitív tagokat $+$-szal helyettesítjük,

b) a 0 tagokat elhagyjuk,

c) a negatív tagokat $-$-szal helyettesítjük

és megszámoljuk, hogy az így nyert sorozatban hányszor vált az előjel.

Példa

$$\sharp e\text{-}v(-2, 3, 5, 6, -3, 0, 0, -1, 2, 0, 0, 5, 6, 1, -2) =$$

$$\to (- + + + - - + + + + -) \to \ = 4$$

Descartes-féle előjel szabály I.

Descartes-féle előjel szabály I.

Descartes-féle előjel szabály I.

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]$. Legyen $\sharp\text{gyök}_+(p)$ a pozitív gyökök multiplicitással számolt száma.

Descartes-féle előjel szabály I.

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]$. Legyen $\sharp\text{gyök}_+(p)$ a pozitív gyökök multiplicitással számolt száma. Ekkor

$$\sharp\text{gyök}_+(p) \equiv \sharp e\text{-}v(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d) \pmod 2.$$

Descartes-féle előjel szabály II.

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor

$$\sharp \text{gyök}_+(p) \leq \sharp e\text{-}v(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d).$$

Descartes-féle előjel szabály II.

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor

$$\sharp\text{gyök}_+(p) \leq \sharp e\text{-}v(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d).$$

Bizonyítás:

Legyen polinomunk $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)q(x)$, ahol $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ pozitív, $q(x)$ pozitív gyök nélküli polinom.

Descartes-féle előjel szabály II.

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor

$$\sharp\text{gyök}_+(p) \leq \sharp e\text{-}v(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d).$$

Bizonyítás:

Legyen polinomunk $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)q(x)$, ahol $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ pozitív, $q(x)$ pozitív gyök nélküli polinom.

k-re vonatkozó indukció.

Descartes-féle előjel szabály II.

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor

$$\sharp\text{gyök}_+(p) \leq \sharp e\text{-}v(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d).$$

Bizonyítás:

Legyen polinomunk $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_k)q(x)$, ahol $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ pozitív, $q(x)$ pozitív gyök nélküli polinom.

k-re vonatkozó indukció.

$(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_k)q(x) \to a_0 + a_1x + a_2 + x^2 + \ldots + a_dx^d$.

Descartes-féle előjel szabály II.

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor

$$\sharp\text{gyök}_+(p) \leq \sharp e\text{-}v(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d).$$

Bizonyítás:

Legyen polinomunk $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)q(x)$, ahol $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ pozitív, $q(x)$ pozitív gyök nélküli polinom.

k-re vonatkozó indukció.

$(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)q(x) \to a_0 + a_1x + a_2 + x^2 + \ldots + a_dx^d$.

Tudjuk, hogy $k-1 \leq \sharp e\text{-}v(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d)$

Descartes-féle előjel szabály II.

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor

$$\sharp\text{gyök}_+(p) \leq \sharp e\text{-}v(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d).$$

Bizonyítás:

Legyen polinomunk $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_k)q(x)$, ahol $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ pozitív, $q(x)$ pozitív gyök nélküli polinom.

k-re vonatkozó indukció.

$(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_k)q(x) \to a_0 + a_1 x + a_2 + x^2 + \ldots + a_d x^d$.

Tudjuk, hogy $k - 1 \leq \sharp e\text{-}v(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d)$ (indukciós feltevés).

Descartes-féle előjel szabály II.

Legyen $p \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor

$$\sharp\text{gyök}_+(p) \leq \sharp e\text{-}v(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d).$$

Bizonyítás:

Legyen polinomunk $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)q(x)$, ahol $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ pozitív, $q(x)$ pozitív gyök nélküli polinom.

k-re vonatkozó indukció.

$(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)q(x) \to a_0 + a_1x + a_2 + x^2 + \ldots + a_dx^d$.

Tudjuk, hogy $k-1 \leq \sharp e\text{-}v(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d)$ (indukciós feltevés).

$(x-\alpha)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)q(x) \to$
$-\alpha a_0 + (a_0 - \alpha a_1)x + (a_1 - \alpha a_2)x^2 + \ldots + (a_{d-1} - \alpha a_d)x^d + \alpha_d x^{d+1}$.

Bizonyítás (folytatás)

Cél:

$$\sharp e\text{-}v(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d) < \sharp e\text{-}v(-\alpha a_0, a_0 - \alpha a_1, \ldots, a_{d-1} - \alpha a_d, a_d).$$

Bizonyítás (folytatás)

Cél:

$$\sharp e\text{-}v(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d) < \sharp e\text{-}v(-\alpha a_0, a_0 - \alpha a_1, \ldots, a_{d-1} - \alpha a_d, a_d).$$

Ami egyszerű

Bizonyítás (folytatás)

Bizonyítás (folytatás)

Cél:

$$\sharp e\text{-}v(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d) < \sharp e\text{-}v(-\alpha a_0, a_0 - \alpha a_1, \ldots, a_{d-1} - \alpha a_d, a_d).$$

Ami egyszerű

- A bal oldali előjelváltások „öröklődnek” a jobb oldalon.

Bizonyítás (folytatás)

Cél:

$$\sharp e\text{-}v(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d) < \sharp e\text{-}v(-\alpha a_0, a_0 - \alpha a_1, \ldots, a_{d-1} - \alpha a_d, a_d).$$

Ami egyszerű

- A bal oldali előjelváltások „öröklődnek” a jobb oldalon. $\sharp e\text{-}v(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d) \leq \sharp e\text{-}v(-\alpha a_0, a_0 - \alpha a_1, \ldots, a_d)$.

Bizonyítás (folytatás)

Bizonyítás (folytatás)

Cél:

$$\sharp e\text{-}v(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d) < \sharp e\text{-}v(-\alpha a_0, a_0 - \alpha a_1, \ldots, a_{d-1} - \alpha a_d, a_d).$$

Ami egyszerű

- A bal oldali előjelváltások „öröklődnek” a jobb oldalon. $\sharp e\text{-}v(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d) \leq \sharp e\text{-}v(-\alpha a_0, a_0 - \alpha a_1, \ldots, a_d)$.
- Paritás váltás.

Az erdeti Descartes-szabály

minus some other quantity, then this latter quantity is not a root of the equation. Thus the[103] above equation $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$ is divisible by $x-2$, $x-3$, $x-4$ and $x+5$,[104] but is not divisible by x plus or minus any other quantity. Therefore the equation can have only the four roots, 2, 3, 4, and 5.[105] We can determine also the number of true and false roots that any equation can have, as follows:[106] An equation can have as many true roots as it contains changes of sign, from $+$ to $-$ or from $-$ to $+$; and as many false roots as the number of times two $+$ signs or two $-$ signs are found in succession.

Thus, in the last equation, since $+x^4$ is followed by $-4x^3$, giving a change of sign from $+$ to $-$, and $-19x^2$ is followed by $+106x$ and $+106x$ by -120, giving two more changes, we know there are three true roots; and since $-4x^3$ is followed by $-19x^2$ there is one false root.

It is also easy to transform an equation so that all the roots that were false shall become true roots, and all those that were true shall become false. This is done by changing the signs of the second, fourth,

[103] First member of the equation. Descartes always speaks of dividing the equation.

[104] Incorrectly given as $x-5$ in some editions.

[105] Where 5 would now be written -5. Descartes neither states nor explicitly assumes the fundamental theorem of algebra, namely, that every equation has at least one root.

[106] This is the well known "Descartes's Rule of Signs." It was known however, before his time, for Harriot had given it in his *Artis analyticae praxis*, London, 1631. Cantor says Descartes may have learned it from Cardan's writings, but was the first to state it as a general rule. See Cantor, Vol. II(1) pp. 496 and 725.

ne peut eſtre diuiſée par vn binóme compoſé de la quantité inconnue + ou -- quelque autre quantité, cela teſmoigne que cete autre quantité n'eſt la valeur d'aucune de ſes racines. Comme cete derniere

Cõment on peut examiner ſi quelque quantité donnée eſt la valeur d'vne racine.

$x^4 -- 4x^3 -- 19xx + 106x -- 120 \infty 0$

peut bien eſtre diuiſée, par $x -- 2$, & par $x -- 3$, & par $x -- 4$, & par $x + 5$; mais non point par x + ou -- aucune autre quantité. cequi monſtre qu'elle ne peut auoir que les quatre racines 2, 3, 4, & 5.

On connoiſt auſſy de cecy combien il peut y auoir de vrayes racines, & combien de fauſſes en chaſque Equation. A ſçauoir il y en peut auoir autant de vrayes, que les ſignes + & -- s'y trouuent de fois eſtre changés; & autant de fauſſes qu'il s'y trouue de fois deux ſignes +, ou deux ſignes -- qui s'entreſuiuent. Comme en la derniere, a cauſe qu'aprés $+x^4$ il y a $-- 4x^3$, qui eſt vn changement du ſigne + en --, & aprés $-- 19xx$ il y a $+ 106x$, & aprés $+ 106x$ il y a $-- 120$ qui ſont encore deux autres changemens, on connoiſt qu'il y a trois vrayes racines; & vne fauſſe, a cauſe que les deux ſignes --, de $4x^3$, & $19xx$, s'entreſuiuent.

Combien il peut y auoir de vrayes racines en chaſque Equatiõ.

De plus il eſt ayſé de faire en vne meſme Equation, que toutes les racines qui eſtoient fauſſes deuienent vrayes, & par meſme moyen que toutes celles qui eſtoiẽt vrayes deuienent fauſſes: a ſçauoir en changeant tous les ſignes + ou -- qui ſont en la ſeconde, en la quatrieſme, en la ſixieſme, ou autres places qui ſe

Cõment on fait que les fauſſes racines d'vne Equation deuienẽt

A szabály kifacsarása

Gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése a (τ, ∞) intervallumon:

A szabály kifacsarása

Gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése a (τ, ∞) intervallumon: Egyszerű.

A szabály kifacsarása

Gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése a (τ, ∞) intervallumon: Egyszerű. $p(x+\tau)$ pozitív gyökeinek számlálása.

A szabály kifacsarása

Gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése a (τ, ∞) intervallumon: Egyszerű. $p(x+\tau)$ pozitív gyökeinek számlálása.

Negatív gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése.

A szabály kifacsarása

Gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése a (τ, ∞) intervallumon: Egyszerű. $p(x+\tau)$ pozitív gyökeinek számlálása.

Negatív gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése. Egyszerű.

A szabály kifacsarása

Gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése a (τ, ∞) intervallumon: Egyszerű. $p(x+\tau)$ pozitív gyökeinek számlálása.

Negatív gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése. Egyszerű. $p(-x)$ pozitív gyökeinek számlálása.

Gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése a (τ, ∞) intervallumon: Egyszerű. $p(x+\tau)$ pozitív gyökeinek számlálása.

Negatív gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése. Egyszerű. $p(-x)$ pozitív gyökeinek számlálása.

Gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése a $(0, 1)$ intervallumon:

A szabály kifacsarása

Gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése a (τ, ∞) intervallumon: Egyszerű. $p(x+\tau)$ pozitív gyökeinek számlálása.

Negatív gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése. Egyszerű. $p(-x)$ pozitív gyökeinek számlálása.

Gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése a $(0, 1)$ intervallumon: Egyszerű.

A szabály kifacsarása

Gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése a (τ, ∞) intervallumon: Egyszerű. $p(x+\tau)$ pozitív gyökeinek számlálása.

Negatív gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése. Egyszerű. $p(-x)$ pozitív gyökeinek számlálása.

Gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése a $(0, 1)$ intervallumon: Egyszerű. $p(1/x)$ gyökeinek számlálása $(1, \infty)$-ben.

A szabály kifacsarása

Gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése a (τ, ∞) intervallumon: Egyszerű. $p(x+\tau)$ pozitív gyökeinek számlálása.

Negatív gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése. Egyszerű. $p(-x)$ pozitív gyökeinek számlálása.

Gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése a $(0,1)$ intervallumon: Egyszerű. $p(1/x)$ gyökeinek számlálása $(1,\infty)$-ben.

Gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése az (a,b) intervallumon:

A szabály kifacsarása

Gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése a (τ, ∞) intervallumon: Egyszerű. $p(x+\tau)$ pozitív gyökeinek számlálása.

Negatív gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése. Egyszerű. $p(-x)$ pozitív gyökeinek számlálása.

Gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése a $(0, 1)$ intervallumon: Egyszerű. $p(1/x)$ gyökeinek számlálása $(1, \infty)$-ben.

Gyökök (multiplicitással számolva) számának meghatározása/becslése az (a, b) intervallumon: Egyszerű.

További észrevételek

1. Észrevétel

$$\sharp\text{gyök}_+(p) = \sharp\text{gyök}_+((1+x)p).$$

További észrevételek

1. Észrevétel

$$\sharp\text{gyök}_+(p) = \sharp\text{gyök}_+((1+x)p).$$

2. Észrevétel

Ha

$$p \equiv (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d),$$

akkor

$$(1+x)p \equiv (a_0, a_0 + a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_{d-1} + a_d, a_d).$$

További észrevételek

1. Észrevétel

$$\sharp\text{gyök}_+(p) = \sharp\text{gyök}_+((1+x)p).$$

2. Észrevétel

Ha

$$p \equiv (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d),$$

akkor

$$(1+x)p \equiv (a_0, a_0 + a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_{d-1} + a_d, a_d).$$

3. Észevétel

$$\sharp e\text{-}v(p) \geq \sharp e\text{-}v((1+x)p).$$

További facsarások

További facsarások

Észrevétel$^+$

$$\sharp e\text{-}v(p) \geq \sharp e\text{-}v((1+x)p) \geq \sharp e\text{-}v((1+x)^2 p) \geq \sharp e\text{-}v((1+x)^3 p) \geq \dots$$

További facsarások

Észrevétel$^+$

$$\sharp e\text{-}v(p) \geq \sharp e\text{-}v((1+x)p) \geq \sharp e\text{-}v((1+x)^2 p) \geq \sharp e\text{-}v((1+x)^3 p) \geq \dots$$

Definíció

$$\widehat{\sharp e\text{-}v}(p) = \sharp e\text{-}v((1+x)^N p).$$

További facsarások

Észrevétel$^+$

$$\sharp e\text{-}v(p) \geq \sharp e\text{-}v((1+x)p) \geq \sharp e\text{-}v((1+x)^2p) \geq \sharp e\text{-}v((1+x)^3p) \geq \dots$$

Definíció

$$\widehat{\sharp e\text{-}v}(p) = \sharp e\text{-}v((1+x)^N p).$$

Descartes-szabály$^+$

$$\sharp\text{gyök}_+ \leq \widehat{\sharp e\text{-}v}(p).$$

Tételek

Pólya György tétele (1928)

Ha $\sharp\text{gyök}_+(p) = 0$, akkor $\sharp\widehat{e\text{-}v}(p) = 0$.

Tételek

Pólya György tétele (1928)

Ha $\sharp\text{gyök}_+(p) = 0$, akkor $\sharp\widehat{e\text{-}v}(p) = 0$.

Avendano (2009)

$$\sharp\text{gyök}_+(p) = \sharp\widehat{e\text{-}v}(p).$$

Budan—Fourier-szabály

Legyen $a < b$ valós számok, a p polinom nem-gyökei. Ekkor a p polinom (a, b) intervallumbeli (valós) gyökeinek száma (multiplicitással)

(i) legfeljebb

$$\sharp e\text{-}v(p(a), p'(a), \ldots, p^{(d)}(a)) - \sharp e\text{-}v(p(b), p'(b), \ldots, p^{(d)}(b)),$$

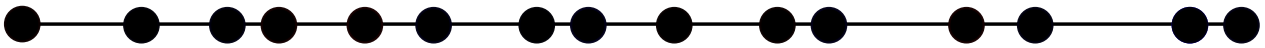
(ii) modulo 2 értéke =

$$\sharp e\text{-}v(p(a), p'(a), \ldots, p^{(d)}(a)) - \sharp e\text{-}v(p(b), p'(b), \ldots, p^{(d)}(b)).$$

Újból az ajtók

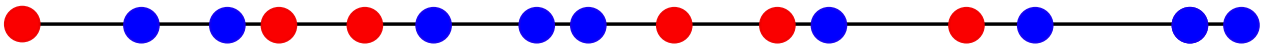
Újból az ajtók

Újból az ajtók



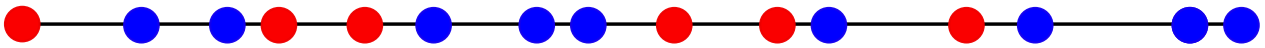
Vegyünk egy szakaszt. Tetszőlegesen osszuk fel kisebb, elemi szakaszokra.

Újból az ajtók



Vegyünk egy szakaszt. Tetszőlegesen osszuk fel kisebb, elemi szakaszokra.

Egyik végpontja legyen PIROS, másik legyen KÉK. Az osztópontokat tetszőlegesen PIROS és KÉK színre színezzük.

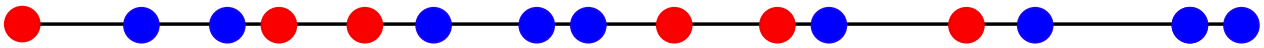


Vegyünk egy szakaszt. Tetszőlegesen osszuk fel kisebb, elemi szakaszokra.

Egyik végpontja legyen PIROS, másik legyen KÉK. Az osztópontokat tetszőlegesen PIROS és KÉK színre színezzük.

Hány tarka (elemi) szakasz van?

Újból az ajtók



Vegyünk egy szakaszt. Tetszőlegesen osszuk fel kisebb, elemi szakaszokra.

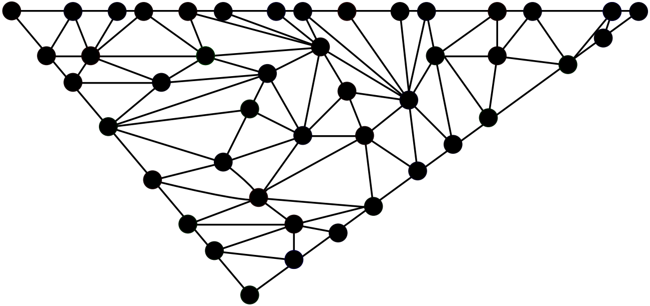
Egyik végpontja legyen PIROS, másik legyen KÉK. Az osztópontokat tetszőlegesen PIROS és KÉK színre színezzük.

Hány tarka (elemi) szakasz van?

PÁRATLAN.

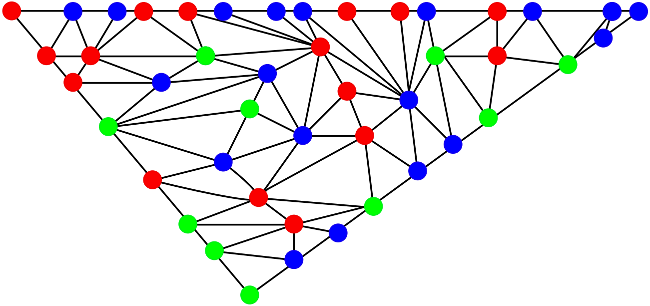
2-dimenziós általánosítás

2-dimenziós általánosítás



Háromszög oldalak mentén illeszkedő háromszögekkel lefedése.

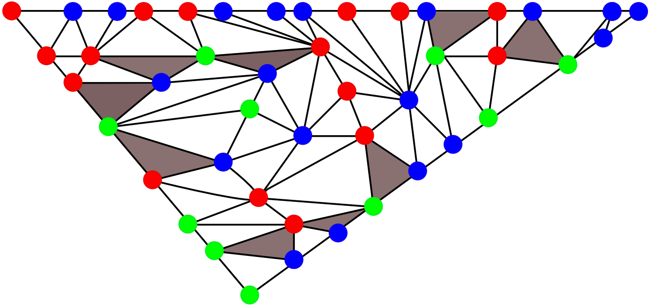
2-dimenziós általánosítás



Háromszög oldalak mentén illeszkedő háromszögekkel lefedése.

Csúcsok SPERNER színezése.

2-dimenziós általánosítás

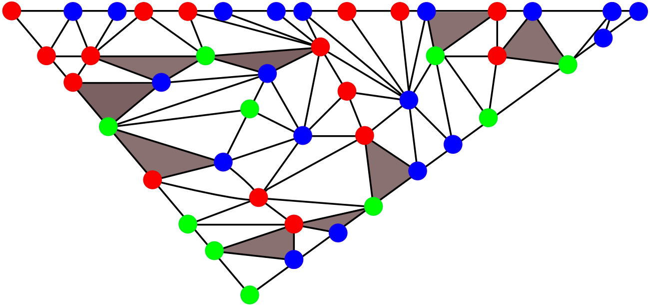


Háromszög oldalak mentén illeszkedő háromszögekkel lefedése.

Csúcsok SPERNER színezése.

Hány tarka („kis") háromszög van?

2-dimenziós általánosítás



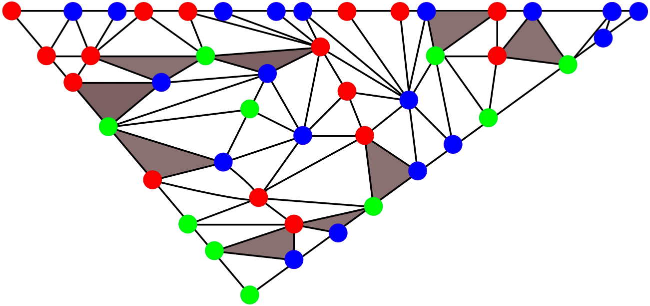
Háromszög oldalak mentén illeszkedő háromszögekkel lefedése.

Csúcsok SPERNER színezése.

Hány tarka („kis”) háromszög van?

Sperner-lemma

2-dimenziós általánosítás



Háromszög oldalak mentén illeszkedő háromszögekkel lefedése.

Csúcsok SPERNER színezése.

Hány tarka („kis") háromszög van?

Sperner-lemma

PÁRATLAN.

Miért?

Miért?

Minden háromszögre számoljuk össze hány tarka oldala van. Adjuk össze a számokat.

Miért?

Minden háromszögre számoljuk össze hány tarka oldala van. Adjuk össze a számokat.

Mi az eredmény?

Miért?

Minden háromszögre számoljuk össze hány tarka oldala van. Adjuk össze a számokat.

Mi az eredmény?

Háromszögek hozzájárulása szerint számolva

Tarka háromszögek esetén HÁROM, két-színűek esetén KETTŐ, egy-színűek esetén NULLA.

Miért?

Minden háromszögre számoljuk össze hány tarka oldala van. Adjuk össze a számokat.

Mi az eredmény?

Háromszögek hozzájárulása szerint számolva

Tarka háromszögek esetén HÁROM, két-színűek esetén KETTŐ, egy-színűek esetén NULLA.

A válasz paritása a tarka háromszögek számának paritása.

Miért?

Minden háromszögre számoljuk össze hány tarka oldala van. Adjuk össze a számokat.

Mi az eredmény?

Háromszögek hozzájárulása szerint számolva

Tarka háromszögek esetén HÁROM, két-színűek esetén KETTŐ, egy-színűek esetén NULLA.

A válasz paritása a tarka háromszögek számának paritása.

Szakaszok hozzájárulása szerint számolva

Belső tarka szakaszok esetén KETTŐ, oldalsó tarka szakaszok esetén EGY, nem tarka szakaszok esetén NULLA.

Miért?

Minden háromszögre számoljuk össze hány tarka oldala van. Adjuk össze a számokat.

Mi az eredmény?

Háromszögek hozzájárulása szerint számolva

Tarka háromszögek esetén HÁROM, két-színűek esetén KETTŐ, egy-színűek esetén NULLA.

A válasz paritása a tarka háromszögek számának paritása.

Szakaszok hozzájárulása szerint számolva

Belső tarka szakaszok esetén KETTŐ, oldalsó tarka szakaszok esetén EGY, nem tarka szakaszok esetén NULLA.

A válasz paritása az oldalsó tarka szakaszok számának paritása,

Miért?

Minden háromszögre számoljuk össze hány tarka oldala van. Adjuk össze a számokat.

Mi az eredmény?

Háromszögek hozzájárulása szerint számolva

Tarka háromszögek esetén HÁROM, két-színűek esetén KETTŐ, egy-színűek esetén NULLA.

A válasz paritása a tarka háromszögek számának paritása.

Szakaszok hozzájárulása szerint számolva

Belső tarka szakaszok esetén KETTŐ, oldalsó tarka szakaszok esetén EGY, nem tarka szakaszok esetén NULLA.

A válasz paritása az oldalsó tarka szakaszok számának paritása, PÁRATLAN.

Emanuel Sperner (1905-1980)

Alkalmazás: Brouwer fixponttétele

1,2 dimenzió

1,2 dimenzió

(i) Ha $f : [0, 1] \to [0, 1]$ folytonos leképzés, akkor van fixpontja,

1,2 dimenzió

(i) Ha $f : [0, 1] \to [0, 1]$ folytonos leképzés, akkor van fixpontja, azaz olyan $r \in [0, 1]$, amelyre $f(r) = r$.

1,2 dimenzió

(i) Ha $f : [0,1] \to [0,1]$ folytonos leképzés, akkor van fixpontja, azaz olyan $r \in [0,1]$, amelyre $f(r) = r$.

(ii) Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$ zárt háromszög-lap.

Alkalmazás: Brouwer fixponttétele

1,2 dimenzió

(i) Ha $f : [0,1] \to [0,1]$ folytonos leképzés, akkor van fixpontja, azaz olyan $r \in [0,1]$, amelyre $f(r) = r$.

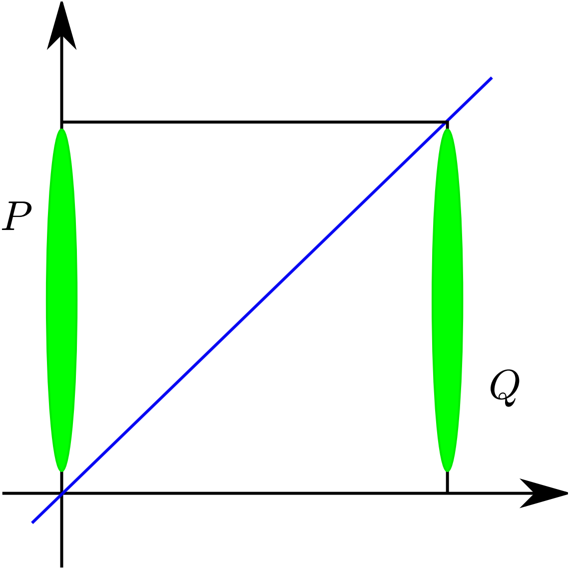
(ii) Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$ zárt háromszög-lap. Ha $f : T \to T$ folytonos leképzés, akkor van fixpontja,

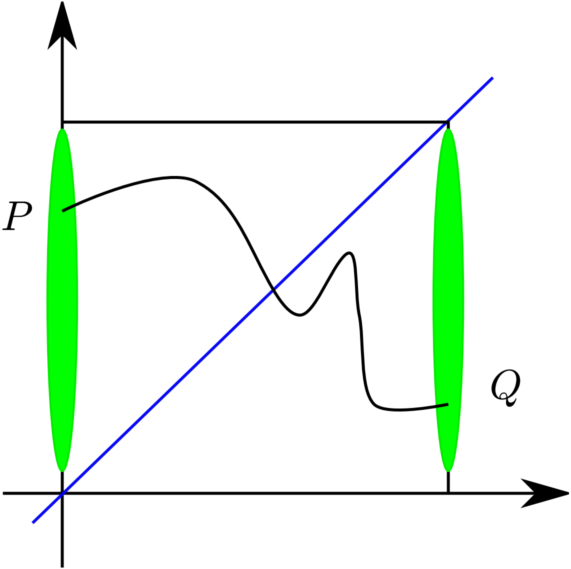
1,2 dimenzió

(i) Ha $f : [0,1] \to [0,1]$ folytonos leképzés, akkor van fixpontja, azaz olyan $r \in [0,1]$, amelyre $f(r) = r$.

(ii) Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$ zárt háromszög-lap. Ha $f : T \to T$ folytonos leképzés, akkor van fixpontja, azaz olyan $r \in T \subset \mathbb{R}^2$, amelyre $f(r) = r$.

1-dimenzió




P
Q

Gyökök és együtthatók

Gyökök és együtthatók

p együtthatói: $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$.

Gyökök és együtthatók

p együtthatói: $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$.
p gyökei: $p(x) = (x + r_1)(x + r_2)\ldots(x + r_n)$.

p együtthatói: $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$.
p gyökei: $p(x) = (x + r_1)(x + r_2) \ldots (x + r_n)$.
Ekkor

$$a_{n-1} = r_1 + r_2 + \ldots + r_n,$$

Gyökök és együtthatók

p együtthatói: $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$.
p gyökei: $p(x) = (x + r_1)(x + r_2)\ldots(x + r_n)$.
Ekkor

$$a_{n-1} = r_1 + r_2 + \ldots + r_n,$$

$$a_{n-2} = r_1r_2 + r_1r_3 + \ldots + r_{n-1}r_n,$$

Gyökök és együtthatók

p együtthatói: $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$.
p gyökei: $p(x) = (x + r_1)(x + r_2)\ldots(x + r_n)$.
Ekkor

$$a_{n-1} = r_1 + r_2 + \ldots + r_n,$$

$$a_{n-2} = r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n,$$

$$a_{n-3} = r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \ldots + r_{n-2} r_{n-1} r_n,$$

Gyökök és együtthatók

p együtthatói: $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$.
p gyökei: $p(x) = (x + r_1)(x + r_2)\ldots(x + r_n)$.
Ekkor

$$a_{n-1} = r_1 + r_2 + \ldots + r_n,$$

$$a_{n-2} = r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n,$$

$$a_{n-3} = r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \ldots + r_{n-2} r_{n-1} r_n,$$

$$a_{n-4} = r_1 r_2 r_3 r_4 + r_1 r_2 r_3 r_5 + \ldots + r_{n-3} r_{n-2} r_{n-1} r_n,$$

$$\vdots$$

p együtthatói: $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$.
p gyökei: $p(x) = (x + r_1)(x + r_2)\ldots(x + r_n)$.
Ekkor

$$a_{n-1} = r_1 + r_2 + \ldots + r_n,$$

$$a_{n-2} = r_1r_2 + r_1r_3 + \ldots + r_{n-1}r_n,$$

$$a_{n-3} = r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \ldots + r_{n-2}r_{n-1}r_n,$$

$$a_{n-4} = r_1r_2r_3r_4 + r_1r_2r_3r_5 + \ldots + r_{n-3}r_{n-2}r_{n-1}r_n,$$

$$\vdots$$

$$a_0 = r_1r_2\ldots r_{n-1}r_n.$$

Negatív gyökű polinomok

Tétel (Newton)

$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ minden gyöke negatív valós szám.

Negatív gyökű polinomok

Tétel (Newton)

$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ minden gyöke negatív valós szám. Ekkor

$$1, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$$

LOG-KONKÁV.

Negatív gyökű polinomok

Tétel (Newton)

$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ minden gyöke negatív valós szám. Ekkor

$$1, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$$

LOG-KONKÁV.

Definíció

$\{a_i\}_{i=0}^n$ log-konkáv, ha

Negatív gyökű polinomok

Tétel (Newton)

$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ minden gyöke negatív valós szám. Ekkor

$$1, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$$

LOG-KONKÁV.

Definíció

$\{a_i\}_{i=0}^n$ log-konkáv, ha

- $\{\log a_i\}_{i=0}^n$ konkáv,

Negatív gyökű polinomok

Tétel (Newton)

$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ minden gyöke negatív valós szám. Ekkor

$$1, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$$

LOG-KONKÁV.

Definíció

$\{a_i\}_{i=0}^n$ log-konkáv, ha

- $\{\log a_i\}_{i=0}^n$ konkáv,
- $\frac{\log a_{k-1} + \log a_{k+1}}{2} \leq \log a_k$, ha $k = 1, 2, \ldots, n-1$

Negatív gyökű polinomok

Tétel (Newton)

$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ minden gyöke negatív valós szám. Ekkor

$$1, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$$

LOG-KONKÁV.

Definíció

$\{a_i\}_{i=0}^n$ log-konkáv, ha

- $\{\log a_i\}_{i=0}^n$ konkáv,
- $\frac{\log a_{k-1} + \log a_{k+1}}{2} \leq \log a_k$, ha $k = 1, 2, \ldots, n-1$
- $a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$, ha $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Jelölés

Legyen H egy halmaz. $\binom{H}{k}$ a H halmaz k elemű részhalmazainak összessége.

Tétel

Megadható olyan

$$\varphi : \binom{H}{k-1} \times \binom{H}{k+1} \to \binom{H}{k} \times \binom{H}{k}$$

EGY-EGYértelmű leképzés, amelyre $(A, B) \mapsto (C, D)$ esetén

$$A \uplus B = C \uplus D.$$

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!