HIMT
2016. április 16.
Gyula
Harruckern János Középiskola

Bernoullitól a kényelmes számokig

Dr. Németh József
címzetes egyetemi tanár
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Analízis Tanszék

Jacob Bernoulli (1654-1705)
(egyenlőtlenség, diff.egyenlet; $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; valószínűség - B. eloszlás)
Johann Bernoulli (1667-1748)
(Bernoulli-L'Hôpital szabály; *Euler*; Leibniz-Newton)
Daniel Bernoulli (1700-1782)
(elméleti fizika; mat. alkalmazása)

$\vdots$

(14.)

B.-egyenlőtlenség

I. $(1+x)^n \geq 1+nx$, ha $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N}^+$.
(Bizonyítás; teljes indukció vagy $\dfrac{a^n - b^n}{a-b} = \cdots$; $a = 1+x$, $b = 1$)

II. $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x$, ha $x \geq -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, amelyre $\alpha \leq 0$ vagy $\alpha \geq 1$.

III. $(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x$, ha $0 \leq \alpha \leq 1$.

[II. biz.; fgv. diszkusszió; $\alpha = \dfrac{p}{q} \to a^\alpha$ def.]

[III. biz.: $(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \overset{\mathrm{II}}{\geq} 1+x \Rightarrow (1+\alpha x) \geq (1+x)^\alpha$; $0 < \alpha < 1$]

I. Alk.: Sz-M közép; szélsőérték problémák;

$$\frac{1^\alpha + \cdots n^\alpha}{n^{1+\alpha}} \to \frac{1}{1+\alpha} \ (\alpha > 0) \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \uparrow; \text{ korl.}$$

(2012; ET)

Most III. alkalmazása

a) *Cauchy-egyenlőtlenség*: (C-B-S)

$$\sum_{k=1}^n |a_i b_i| \le \left(\sum_{k=1}^n a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n b_i^2\right)^{1/2};$$

(megj. $|a_i||b_i|$ vehető; vektorok: $|(V_1, V_2)| \le \|V_1\| \cdot \|V_2\|$, L^2 tér)

b) *Hölder-egyenlőtlenség* (L^p; appr. elmélet; Fourier-sorok; (pl. Leindler 227→183)

$$\sum_{k=1}^n |a_i b_i| \le \left(\sum_1^n |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_1^n |b_i|^q\right)^{1/q},$$

$$\text{ahol } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Ad a) B_{III}: $\boxed{(1+x)^{1/2} \le 1 + \frac{x}{2}}$; $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\left[B_I \Rightarrow \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 \ge 1 + x \Rightarrow 1 + \frac{x}{2} \ge (1+x)^{1/2} \right]$$

$(n = 2)$

$\Rightarrow$ *Cauchy*

Ad b) B_{III}: $(1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x \qquad 0 < \alpha < 1$

$\rightarrow$ *Hölder*

Most Ad **a)** (Ad b) szó szerint u.a.)

Alk. $(1 + x)^{1/2} \leq 1 + \dfrac{x}{2}$ (9. osztály) (*MÁZ*!)

(négyzetre: $(1 + x) \leq 1 + x + \dfrac{x^2}{4}$); "=" $\Rightarrow x = 0$

Bizonyítandó

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}$$

$$(1 + x)^{1/2} \leq 1 + \frac{x}{2}\text{-ben } 1 + x \sim y,$$

$$y^{1/2} \leq 1 + \frac{1}{2}(y - 1), \ y \geq 0, \ \text{"} = \text{"} \Leftrightarrow y = 1.$$

Vegyük: $y = \dfrac{A}{B}, \ A \geq 0, \ B > 0$, azaz

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{1/2} \leq 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B} - 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^{1/2} \cdot B^{1/2} \leq B + \frac{1}{2}(A - B) \Leftrightarrow$$

$$(*) \qquad A^{1/2} \cdot B^{1/2} \leq \frac{A}{2} + \frac{B}{2} \; (\text{"} = \text{"} \Leftrightarrow A = B)$$

$$A_i = \frac{a_i^2}{\sum\limits_1^n a_i^2}; \quad B_i = \frac{b_i^2}{\sum\limits_1^n b_i^2}$$

$$(*) \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \sum_1^n A_i^{1/2} B_i^{1/2} \leq \frac{1}{2} \sum_1^n A_i + \frac{1}{2} \sum_1^n B_i = \\ &\qquad = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

vagy

$$\sum_1^n \frac{|a_i|}{\sqrt{\sum a_i^2}} \frac{|b_i|}{\sqrt{\sum b_i^2}} \leq 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n |a_i||b_i| \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_1^n a_i^2} \sqrt{\sum_1^n b_i^2}$$

ez éppen C-B-S; " = " $\Leftrightarrow |a_i| = \lambda |b_i|$.

Megj. $\frac{1}{2} \rightsquigarrow \frac{1}{p}$; $\frac{1}{2} \rightsquigarrow \frac{1}{q}$; $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1) \Rightarrow$ *Hölder*

(akkor $(1+x)^\alpha \le 1 + \alpha x$ kell; $0 < \alpha < 1$-re)

Euler-számelmélet

$\forall p = 4k + 1$ alakú prímszám előáll

$(\Diamond)$ $\qquad x^2 + y^2 = p$ alakban $(x, y \in \mathbb{N})$

Megj.

1) $4k + 3$ (nem; HF)
2) Thue-lemma (Megyesi)

Euler: a $(\Diamond)$ előállítás $\forall p$ esetén egyértelmű.

Biz. ("analízis")

Tegyük fel, hogy valamely p prímszám kétféleképpen áll elő $p = a^2 + b^2$ és $p = x^2 + y^2$ alakban. Ha $a = x$, akkor $b^2 = y^2$, akkor a két előállítás azonos lenne, tehát feltehető, hogy $a \neq x$; legyen pl. $a > x$ (és feltehető, hogy $a > 0$).

Így

$$0 < p(a^2 - x^2) = pa^2 - px^2 = (x^2 + y^2)a^2 - (a^2 + b^2)x^2 = \\ = y^2a^2 - x^2b^2,$$

azaz

$$(*) \qquad 0 < p(a^2 - x^2) = (ya + xb)(ya - xb).$$

Alkalmazva a Cauchy-egyenlőtlenséget

$$(ya + xb)^2 \leq (y^2 + x^2)(a^2 + b^2) = p^2$$

$$(ya - xb)^2 \leq (y^2 + x^2)(a^2 + b^2) = p^2.$$

Így

$$(**) \qquad |ya + xb| \leq p, \quad |ya - xb| \leq p.$$

De $(*) \Rightarrow p/ya + xb$ vagy $p/ya - xb$, viszont $(**)$ miatt ez csak úgy lehet, ha

i) vagy $ya + xb = p$ és $ya - xb = a^2 - x^2$

ii) vagy $ya - xb = p$ és $ya + xb = a^2 - x^2$

---

i) és ii) bármelyikének összeadásából az adódik, hogy

$$2ay = p + a^2 - x^2 \Rightarrow 2ay = x^2 + y^2 - x^2 + a^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a - y)^2 = 0 \Leftrightarrow a = y,$$

de akkor $b^2 = x^2$, azaz nem különbözik a két előállítás, tehát prímszám esetén nincs kétféle előállítás. Ezzel az állítást beláttuk.

Euler: Ha egy páratlan m szám esetén az $x^2+y^2 = m$ előállítás ($x, y \in \mathbb{N}$ és $(x, y) = 1$) egyértelmű, akkor m prím (vagy prímhatvány).

Megjegyzés: páros $4^2 + 2^2 = 20$ (nem)

Euler vizsgálta:

$\boxed{x^2 + Dy^2 = p}$ előállítást

(prímszámok kiszűrése)

α) Ha p prím, akkor $\forall\, D \in \mathbb{N}^+$ esetén egyértelmű.

β) *Fordítva*: $D = 1, \ldots, 10$-ig igaz, hogy ha m páratlan, és $x^2 + Dy^2 = m$ előállítás *egyértelmű*, akkor m prím (vagy prímhatvány).

De: $D = 11$ nem jó: $1^2 + 11 \cdot 2^2 = 15$ (egyértelmű, és nem prím)

Def. D számot *kényelmes* (idoneal; suitable convenient; udobnüj) számnak nevezte, ha érvényes, hogy az

$$x^2 + Dy^2 = m$$

előállítás *egyértelműségéből* következik, hogy m prím (vagy prímhatvány).

Tehát

$$1, 2, \ldots, 10 \text{ kényelmes számok}$$
$$11 \text{ nem kényelmes szám;}$$
$$\text{további kényelmes számok (Euler):}$$
$$12, 13, 15, 16, 18, 21, 22, 24, 25, 28, 30$$
$$33, 37, 40, 42, 45, 48, 57, 58, 60, 70, 72,$$
$$78, 85, 88, 93, 102, 105, 112, 120, 130,$$
$$133, 165, 168, 177, 190, 210, 232, 240,$$
$$253, 273, 280, 312, 330, 345, 357, 385,$$
$$408, 462, 520, 760, 840, 1320, 1365,$$
$$\mathbf{1848}.$$

Euler 10.000000-ig tesztelte, hogy egy szám prím vagy nem ezzel a módszerrel, különösen a $D = 1848$ esettel.

- Euler sejtése: *nincs több*
- XIX, XX. sz. első felében: legfeljebb véges sok (biz.)
- 1973 Peter J. Weinberger: biz.: Legfeljebb még egy van, de ha igaz az általánosított Riemann-hipotézis, akkor nincs több.

TÖTYÖRGÉS

TISZTELD EULERT!


2014/08/03 10:09