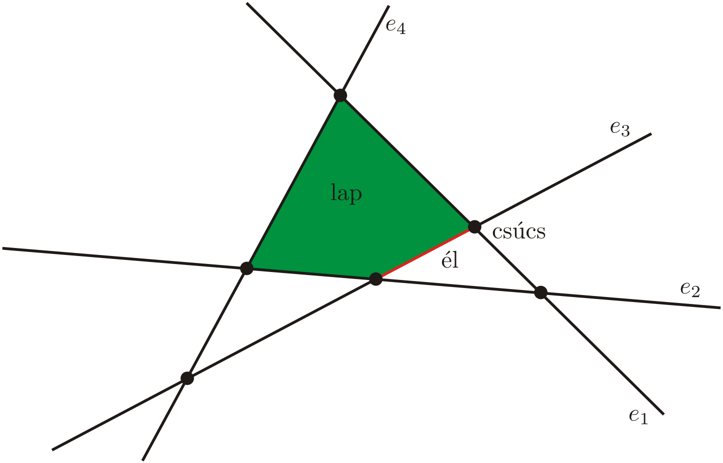
Egyenesrendszerek a síkon

Kincses János

SZTE, Bolyai Intézet

Egyenesrendszer

$e_i : a_i x + b_i y = c_i$

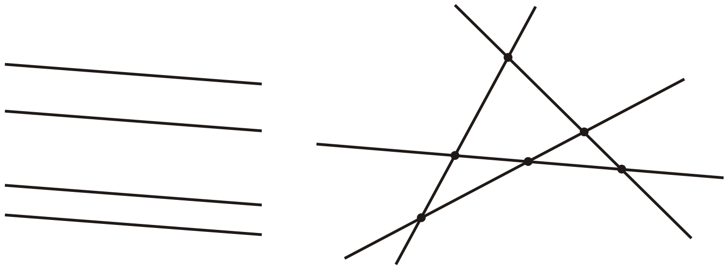


Alkotóelemek száma

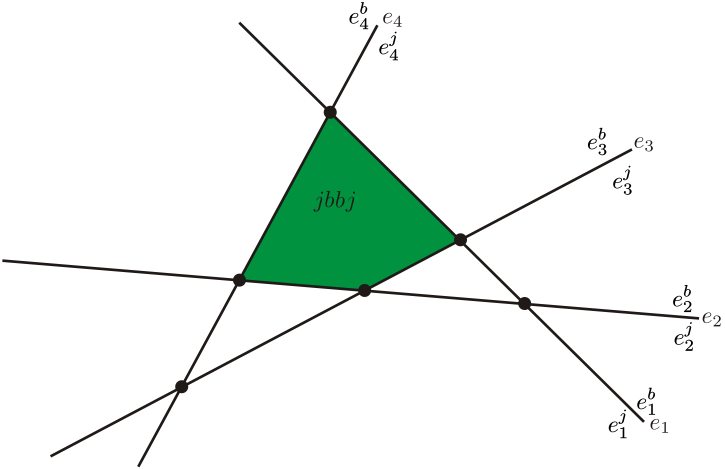
$$0 \leq \text{csúcsok száma} \leq \binom{n}{2}$$

$$n \leq \text{élek száma} \leq n^2$$

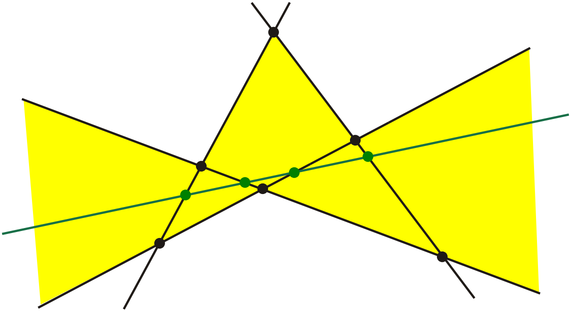
Ezek éles korlátok



Lapok kódolása



Lapok száma indukcióval

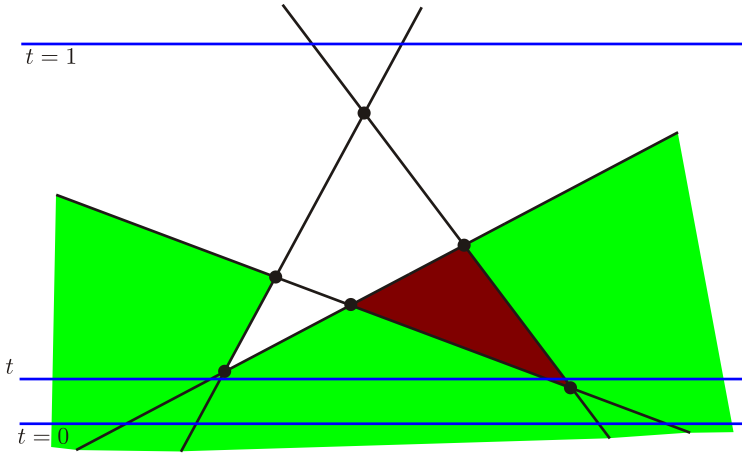


$f(n)$ a maximum

$$f(n) \leq f(n-1) + n \leq \ldots \leq 1 + \binom{n+1}{2}$$

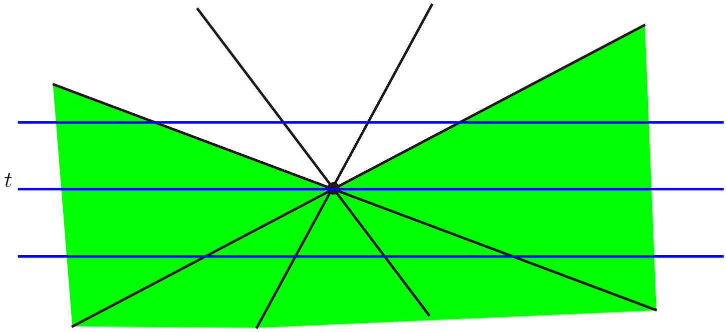
általános helyzet esetén éles

Lapok száma söprő egyenessel



$l(t)$ a t időpillanatig metszett lapok száma

Ha a csúcsra k egyenes illeszkedik, akkor a növekmény $k-1$



- k_i az i-dik csúcsra illeszkedő egyenesek száma,
- d_i az i-dik csúcs foka,

$$l = 1 + n + \sum_i (k_i - 1) = 1 + n + \sum_i \frac{1}{2} d_i - c$$

$$\sum_i d_i = 2e - 2n$$

Euler formula egyenesrendszerekre

$$c - e + l = 1$$

Lapok száma általános esetben

- vannak csúcsok, amikre $\lambda_i \geq 3$ egyenes illeszkedik,
- vannak irányok, melyekkel $\mu_j \geq 2$ egyenes párhuzamos

$$l = 1 + n + \sum (k_i - 1) = 1 + n + s + \sum (\lambda_i - 1)$$

Az egyenespárok leszámlálásával:

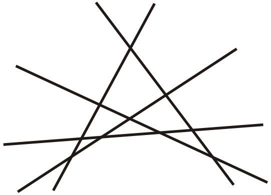
$$\binom{n}{2} = \underbrace{s + \sum \binom{\lambda_i}{2}}_{\text{metszők}} + \underbrace{\sum \binom{\mu_j}{2}}_{\text{párhuzamosak}}$$

Visszahelyettesítve

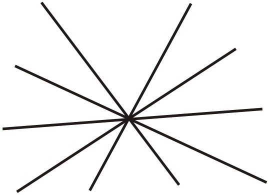
$$\begin{aligned} l &= 1 + n + \binom{n}{2} - \sum \binom{\lambda_i}{2} + \sum (\lambda_i - 1) - \sum \binom{\mu_i}{2} \\ &= 1 + n + \binom{n}{2} - \sum \binom{\lambda_i - 1}{2} - \sum \binom{\mu_i}{2} \end{aligned}$$

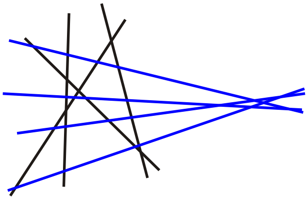
Roberts formula

$$l = 1 + \binom{n+1}{2} - \sum \binom{\lambda_i - 1}{2} - \sum \binom{\mu_i}{2}.$$

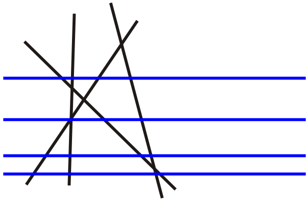


csökkenés $\binom{\lambda_i - 1}{2}$





csökkenés $\binom{\mu_i}{2}$



A lapszám lehetséges értékei

$$\left(n+1, 1+\binom{n+1}{2}\right)$$

Állítás

Ha van csúcs, akkor legalább $2n$ lap van.

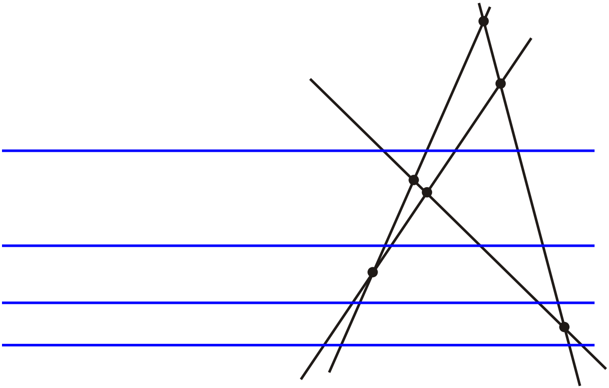
- $(n+1, 2n)$ intervallum üres
- ha $2n$ lap van, akkor „majdnem sugársor”

Állítás

Ha a lapok száma $> 2n$, akkor $\geq 3n-4$ lap van.

$(2n, 3n-4)$ intervallum üres

A lapszám lehetséges értékei



- k párhuzamos (kék),
- $n-k$ általános helyzetű (fekete),
- kék-fekete általános helyzetű

$$l_k = 1 + \binom{n+1}{2} - \binom{n-k}{2} = 1 + (n-k)(k+1) + \binom{k+1}{2}$$

A kékeket fekete csúcsokra tolva, eggyel csökken a lapok száma

$$[l_k - m_k, l_k] \quad \text{intervallum „jó", ahol} \quad m_k = \min\left\{n-k, \binom{k}{2}\right\}$$

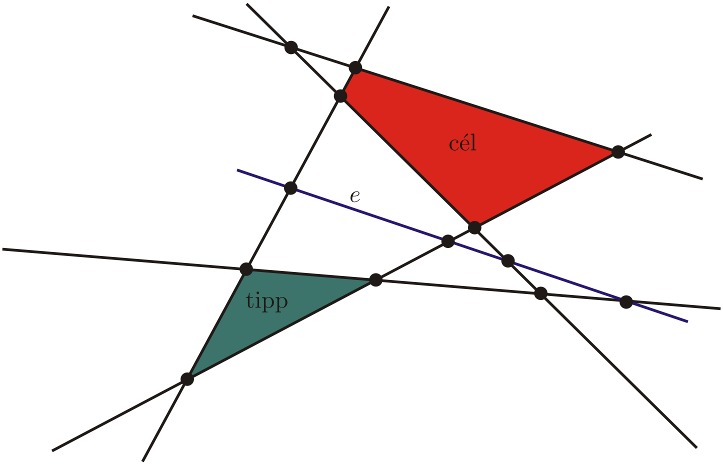
Az intervallumok elhelyezkedése:

$$l_{k-1} < l_k - m_k, \quad \text{ha} \quad \binom{k}{2} < n-k$$
$$l_{k-1} = l_k - m_k, \quad \text{ha} \quad \binom{k}{2} \geq n-k$$

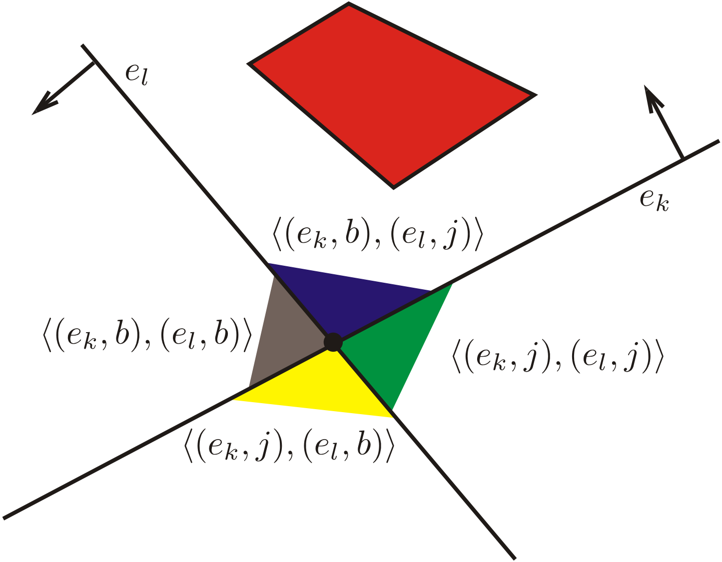
Pontosan az $\cup[l_k - m_k, l_k]$ számok a „jók".

Egy tanulójáték

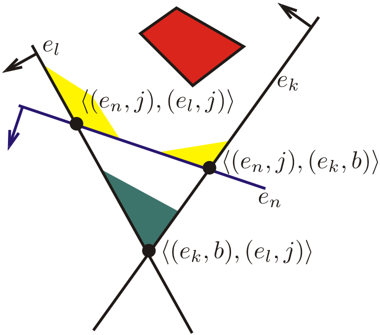
Résztvevők: tanár, diák



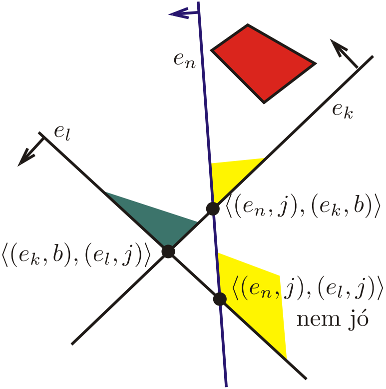
Tippelés két egyenesből



Az új tipp kiagyalása



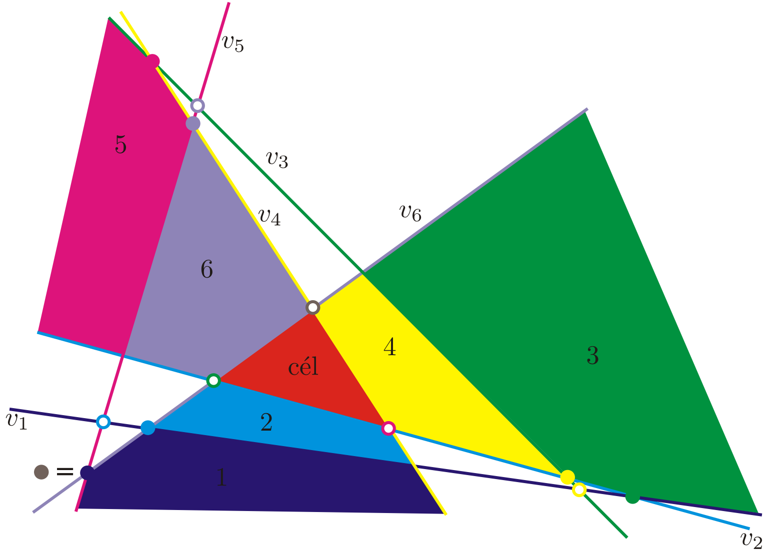
mindkettő jó (dilemma)



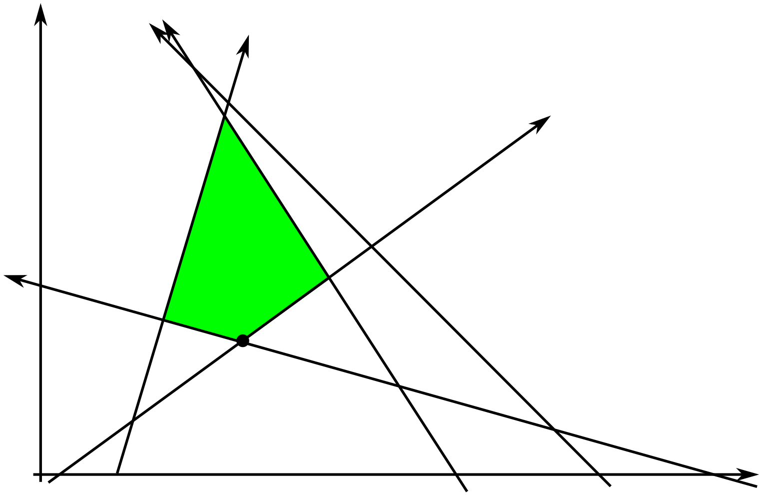
csak az egyik jó

Döntés

Mindig a „jobbra” levőt választom: lehet végtelen ciklus!



Lexikografikusan legkisebb csúcs



Takarékos stratégia: válasszuk mindig a kisebbet

Tétel

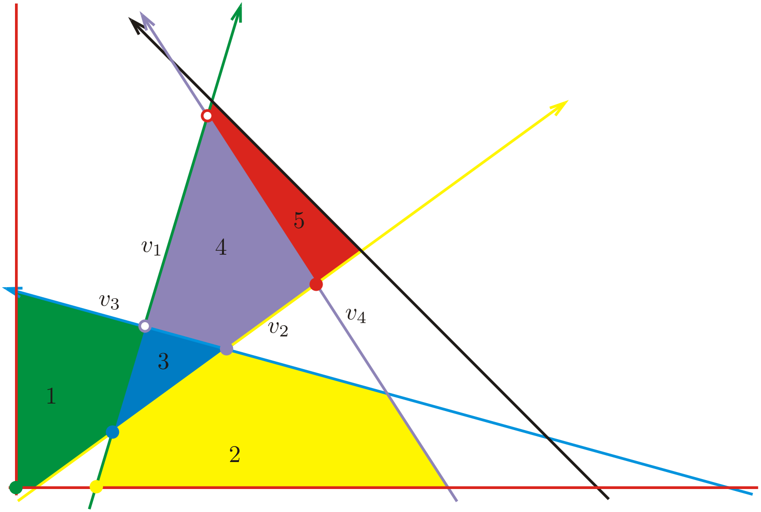
A takarékos stratégia minden lépésében fennállnak az alábbiak

- A diák aktuális tippje mindig standard alakú.
- A következő tipp lexikografikusan nagyobb mint az aktuális tipp.

Tétel

Ha a tanár tudja, hogy a diák a takarékos stratégia szerint játszik, akkor a tanárnak van olyan stratégiája, hogy legfeljebb két tipp-válasz forduló után véget ér a tanulás.

Példa



Köszönöm a figyelmet!