XX. HAJNAL IMRE
MATEMATIKA TESZTVERSENY

Feladatsor

I. kategória

Békés Megyei Tagozata

GYSZC Harruckern János
Szakképző Iskolája és Kollégiuma

MTA SZAB Békés Megyei Testületének
Matematika Tudományos Műhelye

2016. április 16.
Gyula

1. Melyik szám van legközelebb a 100-hoz?

(A) $99+2{,}01$ (B) $98+3{,}011$ (C) $97+4{,}0111$ (D) $101-1{,}01$ (E) $102-2{,}011$

2. Az *ABCD* négyzet *AB* és *BC* oldalára kifelé megszerkesztettük az *AEB* és *BFC* szabályos háromszögeket. Mekkora az *FBE* szög?

(A) 60° (B) 90° (C) 120° (D) 150° (E) 180°

3. Egy tanulócsoportban 4 fiú és 6 lány van. Testtömegeik átlaga 64 kg. A fiúk átlagos tömege 70 kg. A lányok átlagos tömege

(A) 58 kg (B) 59 kg (C) 60 kg (D) 61 kg (E) 62 kg

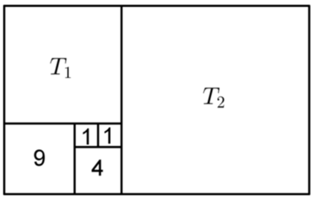
4. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amellyel a 2016-ot megszorozva négyzetszámot (egy pozitív egész szám második hatványát) kapunk?

(A) 7 (B) 8 (C) 14 (D) 18 (E) 21

5. Az $\{1;2;3;4;5;6\}$ halmaznak hány olyan nem üres részhalmaza van, amelyben nincsenek szomszédos számok?

(A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 21 (E) 24

6. Ha az ábrán látható négyzetekbe a területüket írtuk be, akkor $T_1+T_2=$



(A) 41 (B) 52 (C) 61 (D) 89 (E) 125

7. Ha $x<y<0<z$, akkor melyik egyenlőtlenség teljesül biztosan?

(A) $0<x+y+z$ (B) $0<(x+y)^2-z$ (C) $0<x+y+z^2$ (D) $0<x+y-z$ (E) $x+y-z<0$

8. Egy dobókocka *Fibonacci-típusú*, ha lapjaira rendre az 1, 1, 2, 3, 5, 8 számok vannak felírva. Egyszerre feldobunk két Fibonacci-típusú dobókockát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy különböző számokat dobunk?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{5}{9}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{5}{6}$ (E) $\frac{7}{9}$

9. Az *ABC* háromszögre, és a *BC* oldal *D* pontjára teljesül a következő két feltétel:
(1) $AB=AC=CD$;
(2) a *BDA* és *CAB* szögek egyenlő nagyságúak.
Mekkora a *DCA* szög?

(A) 30° (B) 36° (C) 45° (D) 60° (E) 70°

10. A valós számok halmazán a $\oplus$ műveletet a következőképpen definiáljuk: $a\oplus b=a+b^2$. Ha $0<a$ és $a\oplus(a\oplus a)=(a\oplus a)\oplus a$, akkor $a=$

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2}-1$ (D) $\sqrt{2}+1$ (E) 2

11. Egy szigeten lovagok és lókötők élnek. A lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők mindig hazudnak. A sziget mindegyik lakosa tudja a többi lakos mindegyikéről, hogy lovag vagy lókötő. Egyszer a sziget öt lakóját, A, B, C, D és E lakosokat arról kérdeztük, hogy a többiek milyenek. Négy választ kaptunk:

A: „B lókötő.” B: „C lókötő.” C: „D lókötő.” D: „E lókötő.”

Legfeljebb hányan lókötők a megkérdezett öt lakos közül?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

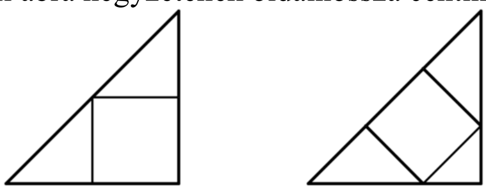
12. Dani és Máté a nyaralás ideje alatt minden reggel mozgással kezdi a napot, a kempinghez közeli tó körül több kört fut. Dani 6 perc alatt, Máté 8 perc alatt futja körül a tavat. Minden teljes kör után megállnak egy kicsit, Dani 1 percet, Máté 2 percet pihen. Ha egyszerre indulnak megegyező irányban, akkor hány perc múlva találkoznak először?

(A) 17 (B) 20 (C) 30 (D) 40 (E) 70

13. Az 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, ... növekvő sorozatban bármely pozitív egész n szám n-szer szerepel. A sorozat 2016-odik tagja

(A) 45 (B) 63 (C) 64 (D) 126 (E) 2016

14. A bal oldali ábrán az egyenlő szárú derékszögű háromszögbe beírt négyzet oldalának hossza 21 cm. Mekkora a jobb oldali ábra négyzetének oldalhossza centiméterben?



(A) 18 (B) 21 (C) $\frac{21\sqrt{2}}{2}$ (D) $21\sqrt{2}$ (E) $14\sqrt{2}$

15. Hány olyan $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=ax^2+bx+c$ függvény van, amelyre $f(x)\cdot f(-x)=f(x^2)$ bármely valós x esetén?

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) végtelen sok

16. Egy körvonalon adott 12 pont. Az adott pontok által meghatározott összes szakasz közül kiválogatjuk azokat a szakaszpárokat, amelyek nem metszik egymást, és közös végpontjuk sincs. Hány ilyen szakaszpár van?

(A) 132 (B) 210 (C) 495 (D) 990 (E) 1485

17. Hány olyan, a tízes számrendszerben kétjegyű n pozitív egész szám van, amelyre teljesül, hogy n számjegyeinek összege megegyezik $6n$ számjegyeinek összegével?

(A) 0 (B) 3 (C) 4 (D) 8 (E) 10

18. Melyik az a legkisebb pozitív egész n, amelyre teljesül a következő állítás: Az n oldalú szabályos sokszögnek van két olyan átlóegyenese, amelyek 50°-os szöget zárnak be egymással?

(A) 5 (B) 10 (C) 12 (D) 18 (E) 72

19. Tekintsük az $x^2-8x-1001y^2=0$ egyenletet igazzá tevő, pozitív egészekből álló (x; y) rendezett számpárok halmazát. A halmaz minden eleméhez rendeljük hozzá az $x+y$ összeget. Ezen összegek minimuma

(A) 73 (B) 100 (C) 102 (D) 114 (E) 136

20. Ha pontosan három olyan x egész szám van, amelyik kielégíti az $x^2 + bx + 2 \le 0$ egyenlőtlenséget, akkor b lehetséges egész értékeinek száma

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 9

21. A 20! (az első 20 pozitív egész szám szorzata) négy darab 0-ra végződik. Melyik számjegy áll közvetlenül a négy darab 0 előtt?

(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

22. Az alábbi táblázatot úgy töltjük ki, hogy minden sorban és minden oszlopban előforduljon az 1, 2, 3, 4, 5 számok mindegyike. Mit írjunk az x-szel jelölt mezőbe?

1	2			
				1
	x	4		
2		5		
	5			4

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

23. Az ABC háromszögben $AB = 2$, $BC = 3$, $CA = 4$. A háromszög beírt körének középpontja O. Az ABO és az ABC háromszög területének aránya

(A) 1 : 3 (B) 1 : 4 (C) 2 : 9 (D) 2 : 11 (E) 3 : 19

24. Az m és n pozitív egészekre $\dfrac{m+n}{m^2 + mn + n^2} = \dfrac{4}{49}$. Ekkor $m + n =$

(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16 (E) 20

25. Az $a_1, a_2, ..., a_{15}$ pozitív valós számokra teljesülnek a következők:

(1) $a_1 + a_2 + ... + a_{15} = 152$;

(2) bármely n pozitív egész esetén ($1 \le n \le 15$) ki lehet választani az $a_1, a_2, ..., a_{15}$ számok közül n darabot úgy, hogy összegük egész szám legyen.

Az $a_1, a_2, ..., a_{15}$ számok legnagyobbikának legkisebb lehetséges értéke

(A) 10 (B) $10\frac{1}{6}$ (C) $10\frac{1}{5}$ (D) $10\frac{1}{4}$ (E) 11

A feladatsort dr. Kosztolányi József, a SZTE Bolyai Intézete egyetemi docense állította össze.