

***XX. HAJNAL IMRE
MATEMATIKA TESZTVERSENY***

Feladatsor

II. kategória



Békés Megyei Tagozata

***GYSZC Harruckern János
Szakképző Iskolája és Kollégiuma***

***MTA SZAB Békés Megyei Testületének
Matematika Tudományos Műhelye***

2016. április 16.

Gyula

1. Melyik szám van legközelebb a 100-hoz?

- (A) $99 + 2,01$ (B) $98 + 3,011$ (C) $97 + 4,0111$ (D) $101 - 1,01$ (E) $102 - 2,011$

2. Az $ABCD$ négyzet AB és BC oldalára kifelé megszerkesztettük az AEB és BFC szabályos háromszögeket. Mekkora az FBE szög?

- (A) 60° (B) 90° (C) 120° (D) 150° (E) 180°

3. Egy tanulócsoporthban 4 fiú és 6 lány van. Testtömegeik átlaga 64 kg. A fiúk átlagos tömege 70 kg. A lányok átlagos tömege

- (A) 58 kg (B) 59 kg (C) 60 kg (D) 61 kg (E) 62 kg

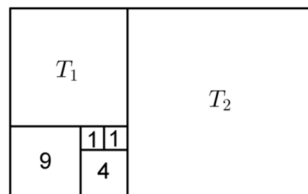
4. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amellyel a 2016-ot megszorozva négyzetszámot (egy pozitív egész szám második hatványát) kapunk?

- (A) 7 (B) 8 (C) 14 (D) 18 (E) 21

5. Az $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ halmaznak hány olyan nem üres részhalmaza van, amelyben nincsenek szomszédos számok?

- (A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 21 (E) 24

6. Ha az ábrán látható négyzetekbe a területüket írtuk be, akkor $T_1 + T_2 =$



- (A) 41 (B) 52 (C) 61 (D) 89 (E) 125

7. Ha $x < y < 0 < z$, akkor melyik egyenlőtlenség teljesül biztosan?

- (A) $0 < x + y + z$ (B) $0 < (x + y)^2 - z$ (C) $0 < x + y + z^2$ (D) $0 < x + y - z$ (E) $x + y - z < 0$

8. Egy dobókocka *Fibonacci-típusú*, ha lapjaira rendre az 1, 1, 2, 3, 5, 8 számok vannak felírva. Egyszerre feldobunk két Fibonacci-típusú dobókockát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy különböző számokat dobunk?

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{5}{9}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{5}{6}$ (E) $\frac{7}{9}$

9. Az ABC háromszögre, és a BC oldal D pontjára teljesül a következő két feltétel:

(1) $AB = AC = CD$;

(2) a BDA és CAB szögek egyenlő nagyságúak.

Mekkora a DCA szög?

- (A) 30° (B) 36° (C) 45° (D) 60° (E) 70°

10. A valós számok halmazán a \oplus műveletet a következőképpen definiáljuk: $a \oplus b = a + b^2$. Ha $0 < a$ és $a \oplus (a \oplus a) = (a \oplus a) \oplus a$, akkor $a =$

- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2} - 1$ (D) $\sqrt{2} + 1$ (E) 2

11. Egy szigeten lovakok és lóköttők élnek. A lovakok mindig igazat mondanak, a lóköttők mindig hazudnak. A sziget mindegyik lakosa tudja a többi lakos mindegyikéről, hogy lovag vagy lóköttő. Egyszer a sziget öt lakóját, A , B , C , D és E lakosokat arról kérdeztük, hogy a többiek milyenek. Négy választ kaptunk:

A : „ B lóköttő.” B : „ C lóköttő.” C : „ D lóköttő.” D : „ E lóköttő.”

Legfeljebb hányan lóköttők a megkérdezett öt lakos közül?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

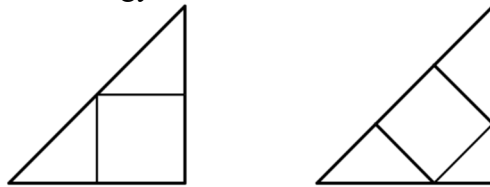
12. Dani és Máté a nyaralás ideje alatt minden reggel mozgással kezdi a napot, a kempinghez közeli tó körül több kört fut. Dani 6 perc alatt, Máté 8 perc alatt futja körül a tavat. Minden teljes kör után megállnak egy kicsit, Dani 1 percet, Máté 2 percet pihen. Ha egyszerre indulnak megegyező irányban, akkor hány perc múlva találkoznak először?

- (A) 17 (B) 20 (C) 30 (D) 40 (E) 70

13. Az 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, ... növekvő sorozatban bármely pozitív egész n szám n -szer szerepel. A sorozat 2016-odik tagja

- (A) 45 (B) 63 (C) 64 (D) 126 (E) 2016

14. A bal oldali ábrán az egyenlő szárú derékszögű háromszögbe beírt négyzet oldalának hossza 21 cm. Mekkora a jobb oldali ábra négyzetének oldalhossza centiméterben?



- (A) 18 (B) 21 (C) $\frac{21\sqrt{2}}{2}$ (D) $21\sqrt{2}$ (E) $14\sqrt{2}$

15. Hány olyan $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény van, amelyre $f(x) \cdot f(-x) = f(x^2)$ bármely valós x esetén?

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) végtelen sok

16. Egy körvonalon adott 12 pont. Az adott pontok által meghatározott összes szakasz közül kiválogatjuk azokat a szakaszpárokat, amelyek nem metszik egymást, és közös végpontjuk sincs. Hány ilyen szakaszpár van?

- (A) 132 (B) 210 (C) 495 (D) 990 (E) 1485

17. Hány olyan, a tízes számrendszerben kétjegyű n pozitív egész szám van, amelyre teljesül, hogy n számjegyeinek összege megegyezik $6n$ számjegyeinek összegével?

- (A) 0 (B) 3 (C) 4 (D) 8 (E) 10

18. Melyik az a legkisebb pozitív egész n , amelyre teljesül a következő állítás: Az n oldalú szabályos sokszögnek van két olyan átlóegyenese, amelyek 50° -os szöget zárnak be egymással?

- (A) 5 (B) 10 (C) 12 (D) 18 (E) 72

19. Tekintsük az $x^2 - 8x - 1001y^2 = 0$ egyenletet igazgató (x, y) pozitív egészekből álló rendezett számpárok halmazát. A halmaz minden eleméhez rendeljük hozzá az $x + y$ összeget. Ezen összegek minimuma

- (A) 73 (B) 100 (C) 102 (D) 114 (E) 136

20. Ha pontosan három olyan x egész szám van, amelyik kielégíti az $x^2 + bx + 2 \leq 0$ egyenlőtlenséget, akkor b lehetséges egész értékeinek száma

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 9

21. Egy 6 egység sugarú körbe írt háromszög két belső szöge 15° -os illetve 60° -os. Mekkora a háromszög területe?

- (A) $9\sqrt{3}$ (B) $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ (C) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{20\sqrt{2}}{3}$ (E) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

22. Legyenek a és b nem negatív egész számok. Tudjuk, hogy $(2^a + 2^b)^2$ előáll két különböző 2-hatvány összegeként. Ekkor

- (A) $a = b$ (B) $a = 0$ vagy $b = 0$ (C) $|a - b| = 1$
(D) a és b 2-hatványok (E) nincs megfelelő a és b

23. Egy négyzet alapú szabályos gúla oldallapjai szabályos háromszögek, beírt gömbjének sugara 1 egység. Milyen távol van a gúla alaplappal szemközti csúcsa a beírt gömb középpontjától?

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $3 - \sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$ (E) 2

24. Az $f: \left[\frac{1}{100}; 1\right] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ függvény zérushelyeinek száma

- (A) 31 (B) 28 (C) 56 (D) 14 (E) 112

25. Egy társaságban *klikk* egy olyan legalább 3 főből álló csoport, amelyben mindenki ismer mindenkit. Legfeljebb hány ismerős pár lehet egy olyan $2n$ ($1 < n$) fős társaságban, amelyben nincs klikk? (Az ismeretség kölcsönös, azaz, ha A ismeri B -t, akkor B is ismeri A -t.)

- (A) $3n - 2$ (B) $n(2n - 1)$ (C) n^2 (D) $\frac{n^3 + 11n - 6}{6}$ (E) $\frac{n(n+1)}{2}$

A feladatsort dr. Kosztolányi József, a SZTE Bolyai Intézete egyetemi docense állította össze.