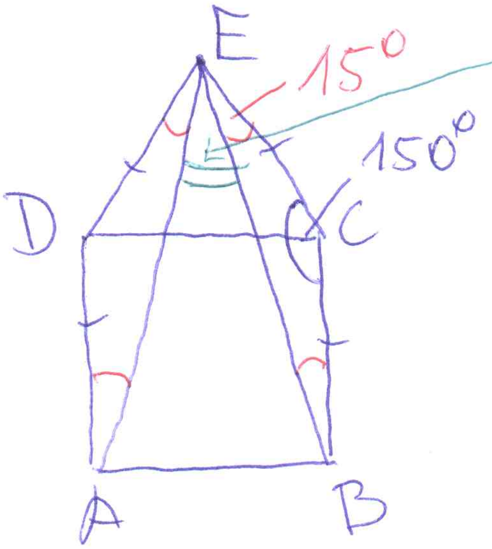
Hajnal Imre Matematika Tanverseny – 2019

Megoldások

1. $1-\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1-\frac{4}{9} = \underline{\underline{\frac{5}{9}}}$ $\boxed{D}$

2. $\frac{6\cdot 4{,}5+a+b}{8} = 4{,}5 \Rightarrow a+b = \underline{\underline{9}}$ $\boxed{B}$

3. $5=2+3$
$7=2+5$
$8=3+5$
$9=2+7$
$10=3+7$
$\boxed{D}$

4. 

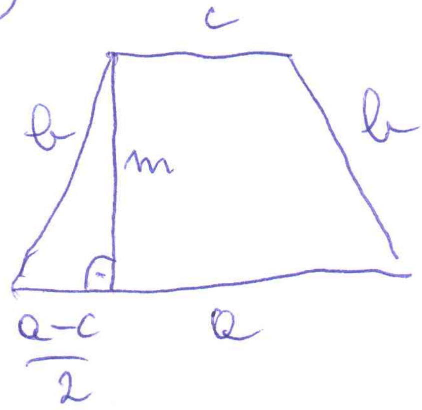
$60°-2\cdot 15° = \underline{\underline{30°}}$ $\boxed{C}$

5. $\sqrt{2} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+x}} = 1+\frac{1\cdot(2+x)}{5+2x} = \frac{3x+7}{2x+5} \Rightarrow 2\sqrt{2}x+5\sqrt{2} = 3x+7$ $\boxed{E}$

$(3-2\sqrt{2})x = 5\sqrt{2}-7$

$\underline{\underline{x}} = \frac{5\sqrt{2}-7}{3-2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}-1)^3}{(\sqrt{2}-1)^2} = \underline{\underline{\sqrt{2}-1}}$

6. $a = 9\text{ cm}$ $\quad c = 4\text{ cm}$ $\quad b = \frac{13}{2}\text{ cm}$



$b = \frac{a+c}{2}$

Pitagorasz-tétel:

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = m^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2$$

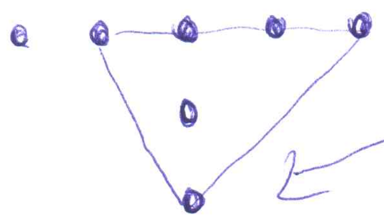
$\boxed{A}$

$$m^2 = ac \iff \boxed{m = \sqrt{ac}}$$

$$m = 6\text{ cm}$$

$$T = \underline{\underline{39\text{ cm}^2}}$$

7. 1.



$\binom{5}{2}$ lehetőség

2 lehetőség

$2\cdot\binom{5}{2}$

$\boxed{E}$

2.

4 lehetőség

$$2\cdot\binom{5}{2} + 4 = \underline{\underline{24}}$$

8. $n^{12} - n^8 - n^4 + 1 = n^8(n^4-1) - (n^4-1) =$

$= (n^8-1)(n^4-1) = (n^4+1)(n^4-1)^2 =$

$= (n^4+1)(n^2+1)^2(n-1)^2(n+1)^2$

$\boxed{D}$

$2 \qquad 2^2 \qquad 2^2 \qquad 2^2\cdot 2^2$

($n-1$ és $n+1$ közül az egyik 4-gyel is osztható)

2^9-nel biztosan osztható.

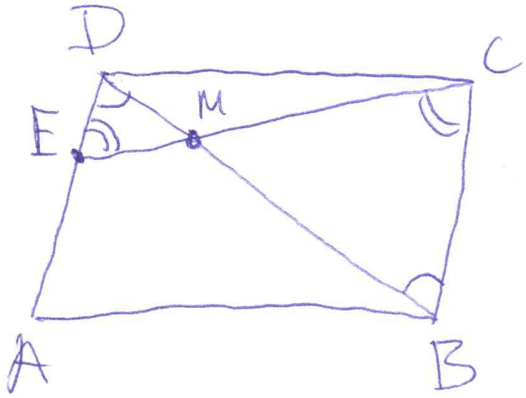
$n = 3$ esetén a kifejezés értéke: $2^9\cdot 5^2\cdot 41$.

9. hétfő kedd szerda csüt. péntek szomb. vas. $\boxed{3.}$

SZ	I	H	H	H	I	I	I
B	I	I	I	I	H	H	H

„Tegnap hazudtam." csak IH ill. HI napokon mondható. $\Longrightarrow$ mindketten csak pénteken mondhatták. $\boxed{D}$

10.



$$\frac{DM}{MB} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$$ $\boxed{A}$

11. $x \circ 2 = 3 \circ (-1)$

$x(x-6) = -9$

$\boxed{x = 3}$ $\boxed{E}$

12. Mivel a sebességek állandó nagyságúak voltak a két futam során, ezért

$$\frac{\text{Máté: } 190}{\text{Kata: } 200} = \frac{d}{210} \iff d = 199{,}5\,(m)$$

13. $\boxed{D}$

$AC = x$; $AB = x + 14$; $BC = x + 30$

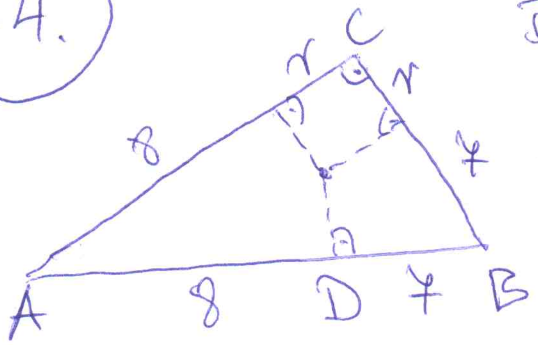
A háromszög-egyenlőtlenség alapján:

$x + x + 14 > x + 30 \iff x > 16$

Így $x = 17$ (cm) és $K_{min} = 95$ (cm) $\boxed{E}$

4.

14.



Pitagorasz tétele:

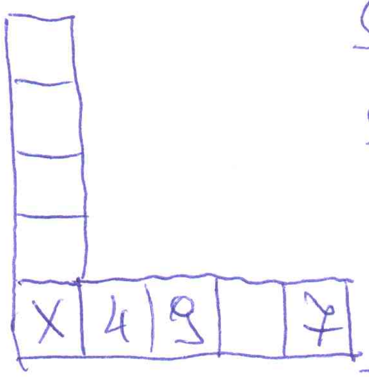
$$(r+8)^2+(r+7)^2=15^2$$

$$r^2+15r-56=0$$

$$\underline{\underline{T}}=\frac{(r+7)(r+8)}{2}=\frac{r^2+15r+56}{2}=\frac{56+56}{2}=\underline{\underline{56}}$$

$\boxed{C}$

15.



Sorösszeg + oszlopösszeg $=\underline{\underline{45+X}}$

Sorösszeg = oszlopösszeg

$\Downarrow$

$45+X$ páros

$\Downarrow$

X páratlan

$\boxed{B}$

$X=1$ jó:

3

5

6

8

1 | 4 | 9 | 2 | 7

$X=3$ jó:

2

5

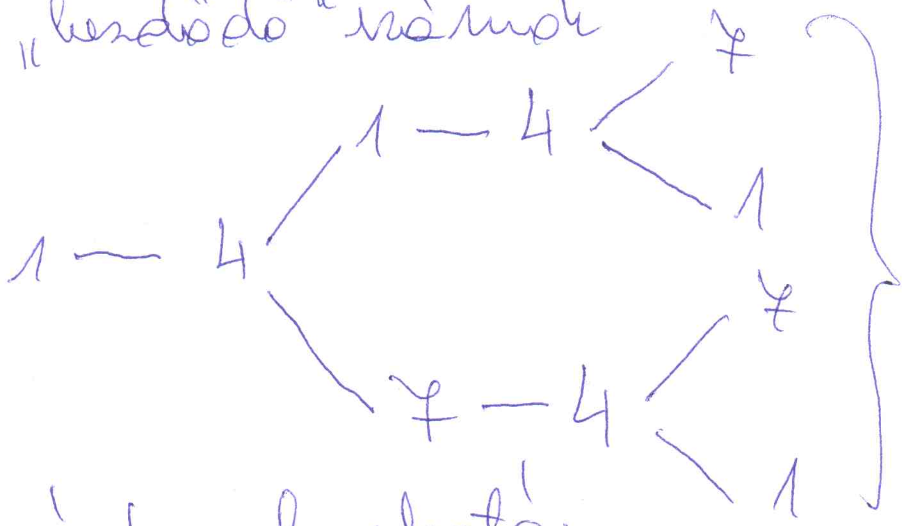
6

8

3 | 4 | 9 | 1 | 7

$X\geq 5$ nem lehet, ugyanis $5+4+9+7=25$, a sor üres helyére 0-t kellene írni.

16. 1-gyel „kezdődő" számok



4 db

Hasonló módon kapható:

2-vel kezdődő → 4 db

3-mal –"– → 8 db

4-gyel –"– → 4 db

5-tel –"– → 4 db

6-tal –"– → 8 db

7-tel –"– → 4 db

8-cal –"– → 4 db

9-cel –"– → 5 db

Összesen 45 megfelelő szám.

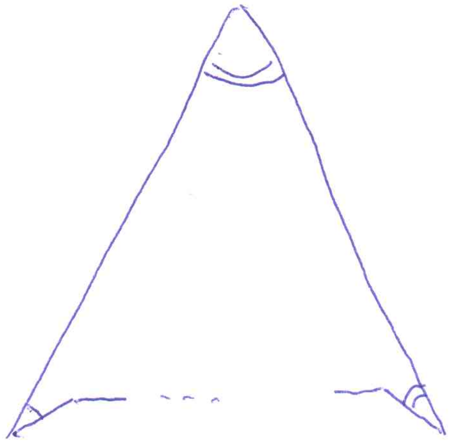
$\boxed{D}$

17.

$$P = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{25}{2}} = \frac{7\cdot 6}{2}\cdot\frac{2}{25\cdot 24} = \frac{7}{100}$$

$\boxed{C}$

18. Mivel a szögösszeg $(n-2)\cdot 180°$, ezért legfeljebb $\underline{n-3}$ homorú szög lehet. Ez megvalósítható:

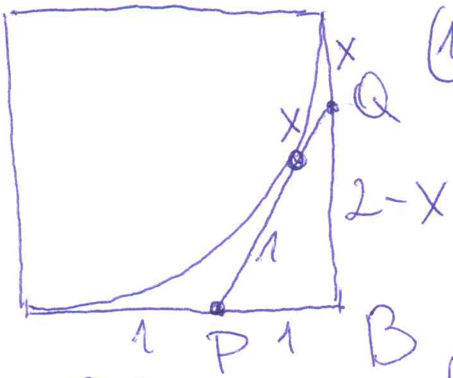


$\boxed{C}$

6.

19. $a_{10} = S_{10} - S_9 = 10^3 - 9^3 = 271$ $\boxed{D}$

20. Tekintsük a négyzet B csúcsát tartalmazó negyedét. Legyen a négyzet oldala 4.



$(1+x)^2 = (2-x)^2 + 1$

$6x = 4$

$x = \frac{2}{3}$, $2 - x = \frac{4}{3}$

Így $BC = 3 - QB$, azaz $\underline{k=3}$. $\boxed{A}$

1. kategória:

21. $xy = x + y \implies y = \frac{x}{x-1}$ $(x \neq 1)$

$xy = \underline{\frac{x^2}{x-1}}$

$\boxed{D}$

22.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$\boxed{P(1) = \frac{10}{36}}$

$P(0) = \frac{6}{36}$

$P(2) = \frac{8}{36}$ $P(4) = \frac{4}{36}$

$P(3) = \frac{6}{36}$ $P(5) = \frac{2}{36}$

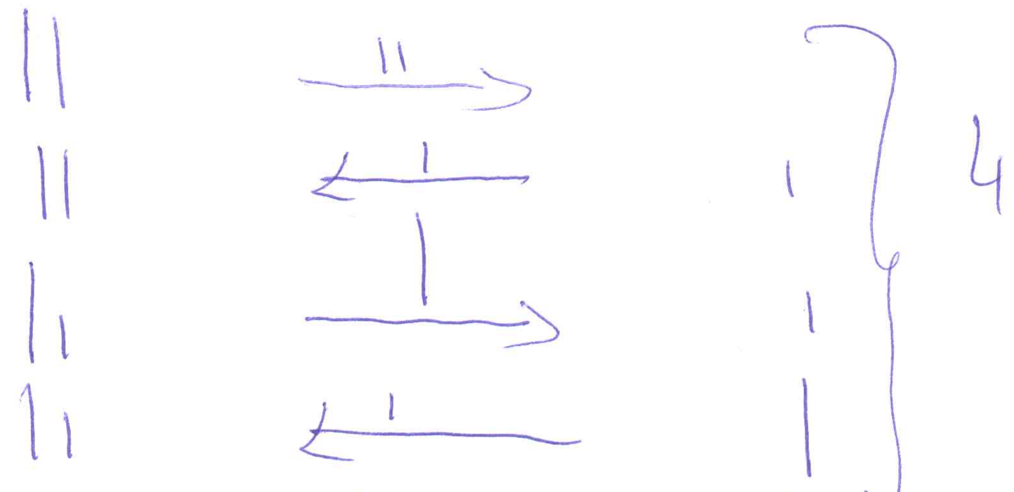
Az 1 a legvalószínűbb különbség.

$\boxed{B}$

23. A 9 nem prím de $9-2=7$ prím.

$\boxed{A}$

24. 1 felnőtt 4 átkeléssel jut át:



A másik felnőtt is 4 átkeléssel jut át, a 2 gyerek pedig még 1 átkeléssel

$\longrightarrow$ 9 átkelés kell.

$\boxed{B}$

25.

Az első kör után marad — 60 db (5), 40 db (5), 40 db (5), 32 db (5)

A második — " —

A harmadik — " —

A negyedik — " —

Hasonlóan

60 db (10)
40 db (10)
20 db (10)
16 db (10)

40 db (20)
30 db (20)
24 db (20)

30 db (50)
24 db (50)

24 db 100

$32 \cdot 5 + 16 \cdot 10 + 24 \cdot 20 + 24 \cdot 50 + 24 \cdot 100 =$

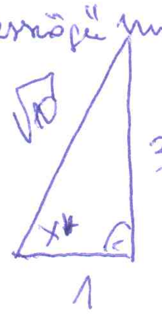
$= 4400$ Ft

$\boxed{B}$

21. $\operatorname{tg} x = 3$ és $\cos x < 0 \implies \pi + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\implies \sin x < 0.$

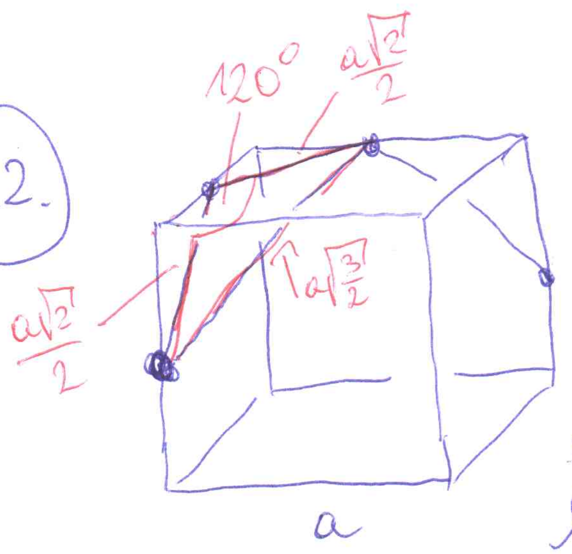
Hegyesszögű modell:

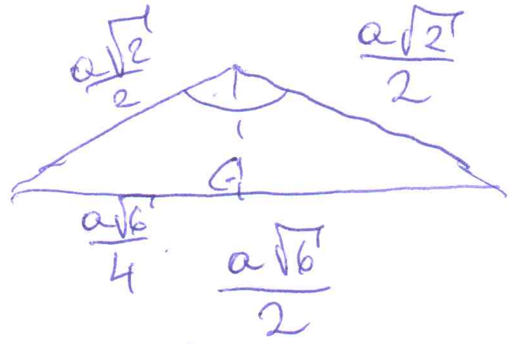


$\implies \cos x = -\frac{1}{\sqrt{10}} \implies \sin x = -\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\boxed{E}$

22.





$\boxed{C}$

Más típusú háromszögek legnagyobb szöge 90°, ezért a kért maximum 120°.

23. $f(3) = 3$

$$f(n+6) = \frac{f(n+3) - 1}{f(n+3) + 1} = \frac{\frac{f(n)-1}{f(n)+1} - 1}{\frac{f(n)-1}{f(n)+1} + 1} = -\frac{1}{f(n)}$$

$$f(n+12) = -\frac{1}{f(n+6)} = -\frac{1}{-\frac{1}{f(n)}} = f(n)$$

$2019 = 168 \cdot 12 + 3 \implies f(2019) = f(3) = 3$ $\boxed{A}$

10.

(24.) $\left[\sqrt{x}\right]+\left[\sqrt[3]{x}\right]=10$

$\left[\sqrt{36}\right]+\left[\sqrt[3]{36}\right]=6+3<10$

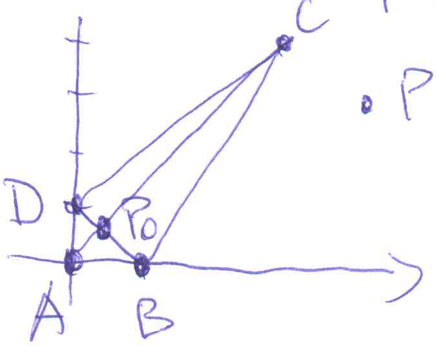
$\left[\sqrt{49}\right]+\left[\sqrt[3]{49}\right]=7+3=10$

$\left[\sqrt{64}\right]+\left[\sqrt[3]{64}\right]=8+4=12$

$\boxed{E}$

49-től 63-ig minden pozitív egész megoldás → $\underline{15 \text{ db}}$

(25.) Legyen $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(3;4)$, $D(0;1)$, és $P(x;y)$



(1) $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=AP+PC\geq AC$

„=” $\Leftrightarrow$ $P\in AC$

(2) $\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2}=BP+DP\geq BD$

„=” $\Leftrightarrow$ $P\in BD$

$f(x;y)\geq AC+BD$ „=” $\Leftrightarrow$ $P = AC\cap BD$

$\min\limits_{x;y\in\mathbb{R}} f(x;y)=AC+BD=\sqrt{3^2+4^2}+\sqrt{1^2+1^2}=$

$=\underline{5+\sqrt{2}}$

$\boxed{D}$