

XXIV. Hajnal Imre Matematika Tesztverseny-2021

I. kategória megoldások

1. Franciska a születésnapjára egy 70 lapos rajzfüzetet kapott Zsuzsa mamától. Néhány nap alatt már 25 oldalt tele is rajzolt. Hány üres oldala maradt Beninek a rajzolásra?

$$2 \cdot 70 - 25 = 115 \text{ oldal maradt} \quad (2 \cdot 70 = 140) \text{ oldalas a rajzfüzet}$$

D

2. Legalább hány gyerek van abban a családban, amelyikben minden gyereknek van lánytestvére és fiútestvére is?

Ha: fiú, fiú, lány, lány \Rightarrow 4 gyerek van a családban, teljesül a feltétel.

Ha bárkit elveszünk vagy hozzárakunk, nem teljesül a feltétel.

C

3. A 8 nyolcszorosához hozzáadtuk a 8 egynolcadát. Mennyi az összeg?

$$8 \cdot 8 + 8 \cdot \frac{1}{8} = 64 + \frac{8}{8} = 65 \text{ az összeg}$$

D

4. Négy szám összege 200. Ha mindegyik számból kivonjuk ugyanazt a számot, rendre 9-et, 15-öt, 34-et, illetve 50-et kapunk. Az eredeti négy szám közül a legkisebb szám:

$$\begin{aligned} a + b + c + d = 200 &\Rightarrow 9 + 15 + 34 + 50 = 108 = a - x + b - x + c - x + d - x = \\ &= a + b + c + d - 4 \cdot x \Rightarrow 200 - 4 \cdot x = 108 \Rightarrow 92 = 4 \cdot x \Rightarrow x = 23 \Rightarrow 9 + 23 = 32 \text{ a legkisebb szám} \end{aligned}$$

C

5. Mekkora az $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ összeg legnagyobb értéke, ha az a és b számokat az egyjegyű pozitív páros egészek közül választjuk?

$x > 0$ esetén $x + \frac{1}{x}$ minimuma 2; $x \geq 1$ esetén szigorúan monoton növekvő. Legnagyobb

$x = 8$ és páros esetén $\frac{8}{2} + \frac{2}{8} = \frac{34}{8} = 4,25$ (A legnagyobb $a = 8$, és a legkisebb $b = 2$ esetén a legnagyobb az összeg.)

B

6. Hány db 0 van $\frac{10^{2021} - 46 \cdot 10^{2019}}{5}$ tört helyiértékes alakjában?

$$\frac{10^{2021} - 46 \cdot 10^{2019}}{5} = \frac{10^{2019} \cdot (100 - 46)}{5} = 2 \cdot 10^{2018} \cdot 54 = 108 \cdot 10^{2018} \Rightarrow 2018 + 1 = 2019 \text{ db } 0\text{-ra végződik}$$

\Rightarrow egyik sem

E

7. Emma, Boró és Beni úszóversenyt rendeztek a nagyszülőknél, Gyulán. Hányféle eredmény szülehetett hármójuk között, ha megengedjük a holtversenyt is?

Nincs holtverseny: ABC ; ACB ; BAC ; BCA ; CAB ; CBA

Kettős holtversenyek: $AB - C$; $C - AB$; $AC - B$; $B - AC$; $BC - A$; $A - BC$

Hármas holtverseny: ABC

Összesen: **13** eset

A

8. Az a , b , c és d egész számokra igaz, hogy $a \cdot c = b \cdot d$. Melyik lehet az alábbi esetek közül az $a \cdot b \cdot c \cdot d$ szorzat értéke?

$$a \cdot c = b \cdot d \Rightarrow a \cdot b \cdot c \cdot d = a \cdot c \cdot b \cdot d = b \cdot d \cdot b \cdot d = (b \cdot d)^2$$

Ez négyzetszám, így csak a $2025 = 45^2$ lehet a megadott lehetőségek közül.

D

9. Mekkora, hány területegység az $ABCD$ négyszög területe, ha csúcsainak koordinátái $A(2; 4)$, $B(0; 3)$, $C(-2; -2)$ és $D(4; 0)$?

A négyszöget praktikus módon 2 db derékszögű háromszöggel (kék) kiegészítjük.

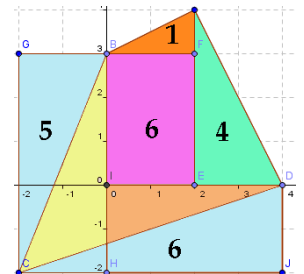
Az így keletkezett hatszöget daraboljuk:

$$4 + 1 + 6 + 10 + 8 = 29 \text{ a nagy hatszög területe}$$

$$5 + 6 = 11 \text{ a levonandó területek összege}$$

$$29 - 11 = \mathbf{18} \text{ a keresett négyszög területe}$$

B



10. Patrik a Mikulás - csomagjában színes papírba csomagolt cukrokat talált. Kettő kivételével mind piros, kettő kivételével mind sárga, és kettő kivételével mind kék. Hány cukor volt a csomagban?

Ha: egy piros, egy sárga és egy kék \Rightarrow **3 darab**, teljesülnek a feltételek.

Ha bármelyiket elveszük vagy bármit hozzárakunk, nem teljesülnek a feltételek.

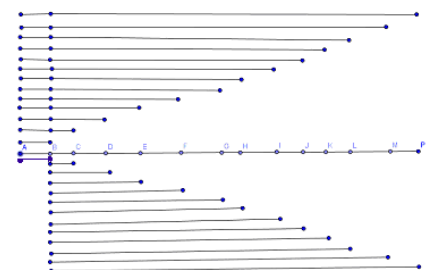
A

11. Furfangos Alex apukája 14 db szőlőtőkét telepített a kerítés mellé egy egyenes mentén. A legszélső tőkének az összes többitől mért távolságának összege 280 m, míg a közvetlen mellette lévő tőkének szintén az összes többitől mért távolságának összege 256 m. Alex kiszámolta, milyen messze van az első két tőke egymástól. Mennyit kapott eredményül Alex, ha jól számolt?

A-nak az az összesztől mért távolságösszege 12 AB távolsággal több, mint B-nek az összesztől mért távolságösszege.

$$280 - 256 = 24 = 12 AB \Rightarrow AB = 2 \text{ m}$$

C



12. Add össze azokat az n egész számokat, amelyek esetén a $\frac{12}{n-1}$ algebrai tört helyettesítési értéke egész lesz! Mi a helyes összeg?

12-nek osztója az $n - 1$

12 osztói (pozitív, negatív): 1; 2; 3; 4; 6; 12; -1; -2; -3; -4; -6; -12

az n viszont 1-gyel több a fentiekénél: 2; 3; 4; 5; 7; 13; 0; -1; -2; -3; -5; -11

ezek összege: 12

D

13. Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk egymás után. A kapott számokat a dobás sorrendjében egymás után leírva egy kétjegyű számot kapunk. Mi annak a valószínűsége (esélye), hogy az így kapott kétjegyű szám osztható 12-vel?

Készítsünk egy táblázatot, melynek belsejében a lehetséges kétjegyű számok szerepelnek! Összesen 36 lehetőség van, amelyekből 3 megfelelő (sárga).

A keresett valószínűség (esély):

$$P = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

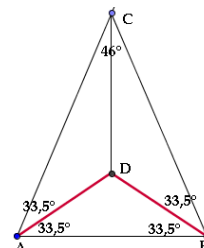
B

14. Az ABC háromszögnek az A csúcsnál lévő belső szöge 67° -os. A háromszög B és C csúcsánál lévő belső szögfelezők metszéspontját jelöljük D -vel! Mekkora a C csúcsnál lévő belső szög, ha tudjuk, hogy $AD = BD$?

A D pont a szögfelezők metszéspontja lesz, az ADB háromszög pedig egyenlő szárú. Felhasználva az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögeinek egyenlőségét, és a háromszög belső szögeinek összegét, kapjuk:

$$\angle ACB = 180^\circ - 2 \cdot 67^\circ = 46^\circ$$

D



15. Egy derékszögű háromszög területe 120 dm^2 , befogóinak arány 5:12. Mekkora a háromszög kerülete?

Befogók: $5 \cdot x$ és $12 \cdot x$. $T = 120 = 30 \cdot x^2$, ebből $x = 2$

Befogók: 10 cm és 24 cm

Átfogó Pitagorasz tétellel (5; 12; 13 Pitagoraszi számhármassal): $13x = 26 \text{ cm}$

Kerület: $30x = 60 \text{ dm} = 6 \text{ m}$

E

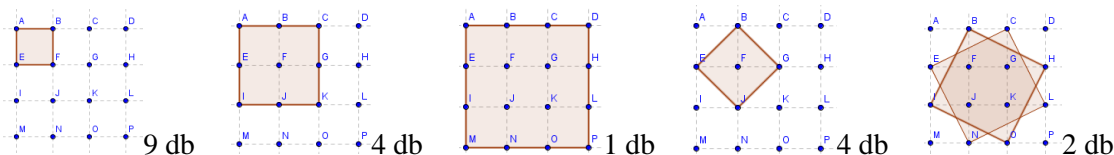
16. Okoska Viki elhatározta, hogy ezentúl hétfőn, szerdán és pénteken mindig igazat fog mondani, a hét többi napján pedig mindig hazudni fog. Egyszer ezt mondta: „Holnap igazat fogok mondani.” A hét melyik napján történt ez?

Igazmondó napon nem mondhatja, mert a következő napon mindig hazudik. Hazudós napon pedig csak akkor mondhatja, ha másnap is hazudik, ez pedig csak szombaton van.

A

17. Egy 3×3 -as négyzetrács (rácsnégyzet) csúcaiba egy-egy pontot rajzoltunk, összesen 16-ot. Hány olyan négyzetet lehet rajzolni, amelyek minden csúcsa a rácspontok közül való? (Két négyzet különböző, ha az egyiknek van olyan csúcsa, amelyik a másiknak nem csúcsa.)

Vizsgáljuk a lehetőségeket:



Összesen: 20

C

18. Az $f(x) = (x + 2) \cdot (2 \cdot x - 12)$ függvény grafikonja parabola, ami az A és a B pontokban metszi az x tengelyt. Hány egység hosszú az AB szakasz?

Zérushelyek: $x_1 = -2$; $x_2 = 6$; ezek távolsága 8 egység

B

19. Vera leírta a füzetébe a 2020-as évszámot. Első lépésben a leírt szám jegyeit összeadta, majd az így kapott összeggel megszorozta a leírt számot. Ezt a szorzatot szintén leírta. Második lépésben már ennek a számnak a jegyeit adta össze, és ezzel az összeggel osztotta az utoljára leírt számot. Az így kapott hányadost ismét leírta a füzetébe. Ezt a két lépésből álló szabályt folytatta. Melyik szám áll Vera füzetében a 2021. helyen?

Alkalmazzuk a megadott kétlépéses szabályt néhányszor (leírt számok félkövér):

2020; $2020 \cdot 4 = 8080$; $8080 : 16 = 505$; $505 \cdot 10 = 5050$, **505**, **5050**, **505**...

A harmadiktól kezdve kettős periódusok láthatók.

Mivel az elején van még két elem, ezért inentől a páratlanadik elem 505, párosadik elem 5050. Mivel a 2021 páratlan, azért a 2021. helyen az 505 áll.

B

20. A Hatvanezer Fa Egyesület tagjai Békéscsabán egy őszi napon 200 fát ültettek. Az elültetett, főleg őshonos fafajtáknak 98 százaléka tölgy volt. A következő ültetéskor javítani szerettek volna ezen az arányon, ezért csak tölgyfákat ültettek. Így ezután a kétszeri alkalommal ültetett fáknak már csak 1 %-a nem volt tölgy. Hány fát ültettek a második alkalommal az egyesület tagjai?

Az első ültetésnél: 200-nak a 98% -a $200 \cdot 0,98 = 196$ tölgy, tehát 4 nem tölgy.

Ez lesz az összes fa 1%-a, így az összes fa $100 \cdot 4 = 400$, tehát másodjára 200 tölgyfát kellett ültetniük.

A

21. Anikó elkezdte leírni a 2021-et közvetlenül követő négyjegyű egész számokat növekvő sorrendben, még hozzá azokat, amelyekben nincs két azonos számjegy és minden számjegy páros. Mennyi a hatodiknak leírt szám számjegyeinek összege?

Írjuk le egymás után ezeket a számokat:

2046; 2048; 2064; 2068; 2084; **2086**

A hatodik helyen a 2086 áll, amelynek a számjegyei összege 16

A

22. Egy négyzet két szemközti oldalának a csúcshoz közelebbi, egymással szemközti negyedelőpontját összekötjük. Az így keletkező két téglalap közül a kisebbik területűnek a kerülete 30 cm. Hány négyzetcentiméter az eredeti négyzet területe?

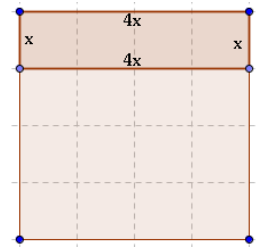
Készítsünk egy vázlatot, feltüntetve abban a feltételeket:

$$\text{A kisebbik téglalap területe: } 10x = 30 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{A nagy négyzet oldala: } 4x = 12$$

$$\text{A nagy négyzet területe: } T = 12 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2$$

E



23. Hat lány új tánckoreográfiát tanul. Egymás előtt lévő két sorban 3 – 3 embernek egymás mellett kell állnia a nyitó képben. Anna és Bea azt kérte, hogy ők valamelyik sorban közvetlenül egymás mellett legyenek, Cili és Dia pedig azt kérte, ne kerüljenek közvetlenül egymás mellé egy sorban (egymás előtt lehetnek). Hányféleképpen tudnak beállni hatan a nyitó képhez, hogy mindenki kívánsága teljesüljön?

Első sor: $ABE; BAE; EAB; EBA$

Második sor: $CFD; DFC$

\Rightarrow ez $4 \cdot 2 = 8$ eset \Rightarrow E – F cserével 16 eset \Rightarrow sorcserével **32** eset

Első sor: $ABC; BAC; CAB; CBA$

Második sor: $DEF \Rightarrow 3! = 6$ - féle sorrend

\Rightarrow ez $4 \cdot 6 = 24$ eset \Rightarrow sorcserével **48** eset

Első sor: $ABD; BAD; DAB; DBA$

Második sor: $CEF \Rightarrow 3! = 6$ - féle sorrend \Rightarrow ez is **48** eset

Összesen: $48 + 48 + 32 = 128$ eset

E

24. Zsófi tele szeretné tankolni gépkocsijának 48 literes üzemanyagtartályát. Mennyi benzin tankolásával lesz tele a tartály, ha az abban lévő üzemanyag jelenlegi mennyiségét az ábrán látható műszer mutatója jelzi?

$$\text{Jelenleg: } 48 \cdot \frac{3}{8} = 18 \text{ liter. Tankolni kell még: } 48 - 18 = 30 \text{ liter}$$

A

25. Csabi, Jancsi és Pisti részt vettek egy többfordulós online matematikaversenyen, ahol mindannyian utazási utalványt nyertek. Pisti nyereményének 60 %-át nyerte Jancsi, Csabi pedig Jancsi nyereményének $\frac{4}{3}$ részével lett gazdagabb. Hány Ft-os utalványt kapott Csabi, ha összesen 60 ezer Ft értékű utalványt utazhattak el?

$$\text{Pisti: } x \quad \text{Jancsi: } 0,6x \quad \text{Csabi: } 0,6x \cdot \frac{4}{3} = 0,8x$$

$$\text{Összesen: } x + 0,6x + 0,8x = 60000 \Rightarrow 2,4x = 60000$$

$$x = 25000$$

Pisti: 25000 Ft

Jancsi: 15000 Ft

Csabi: 20000 Ft

C